Módulo 04
Aritmética de Punto Flotante

Organización de Computadoras
Depto. Cs. e Ing. de la Comp.
Universidad Nacional del Sur

Copyright

Contenidos

- Inconvenientes con la representación **FXP**.
- Problemas con el escalamiento.
- Formatos para la representación **FLP**.
- Concepto de orden de magnitud cero (**OMZ**).
- Situaciones especiales a contemplar.
- Implementación de las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Aritmética de punto fijo

- La aritmética de punto fijo (**FXP**) es apropiada para representar números de base pequeña con órdenes de magnitud acotados.
  - Ejemplo: operando con **32** bits de precisión, el rango a manejar esta acotado por $\pm(2^{31} - 1)$, lo cual corresponde en base **10** a $\pm(10^{11})$.
- Evidentemente este rango es inadecuado en un contexto ingenieril o para las aplicaciones científicas, donde se manejan magnitudes más grandes y también más pequeñas.

Aritmética de punto flotante

- Una alternativa superadora consiste en hacer uso de la notación científica, también conocida como de punto flotante (**FLP**).
- Un cierto número real **f** se denota como el producto entre una mantisa **m** y un exponente **e**, de la siguiente forma:

$$f = m \times b^e$$

  - Tanto **m** como **e** son números signados expresados en una cierta base, mientras que **b** es un entero positivo que denota la base de la representación.

Aritmética de punto flotante

- Volviendo al ejemplo anterior, en caso de contar con **32** bits de precisión, se deben asignar estos bits para representar tanto a **m** como a **e**.
  - Nótese que **b** no es almacenado, su valor se asume, queda implícito una vez acordada la representación de punto flotante a ser empleada.
  - Una posibilidad consiste en reservar los **22** bits más a la izquierda para **m** y los restantes **10** bits para **e**, haciendo uso de una base implicada **b = 2**

Aritmética de punto flotante

- Por lo general, la mantisa **m** puede asumir cualquiera de los tres sistemas vistos para punto fijo.
- Como se puede apreciar, el punto en la mantisa flota a partir de la magnitud del exponente.
  - Es por esta razón que a esta notación se la refiere como de “punto flotante” (floating point).
- Para el caso del exponente **e**, también se puede usar cualquiera de los sistemas vistos o bien hacer uso de alguno de propósito específico.

Inconvenientes con FXP

- Inicialmente las primeras computadoras hacían uso exclusivo de aritmética **FXP**.
  - Al realizar cálculos científicos se debía redondear las magnitudes a menudo, a fin de mantener acotado el número de dígitos significativos.
- En este tipo de aplicaciones es importante lidiar correctamente con las cuestiones relativas al rango, a la precisión y al nivel de significancia de los valores representados.

Problemas de escalamiento

- Las primeras computadoras hicieron un uso intensivo del intervalo unitario **[-1, +1]**.
  - La idea es que cuando el rango de un número se hace muy grande o muy pequeño durante el cómputo, el programador se encargue de seguir la posición del punto en todos los resultados intermedios.
  - Los fuera de rango eran manejados usualmente por escalamiento por software, firmware o hardware.
  - Claro está, los números empleados por los científicos no caben en este acotado intervalo unitario.

Problemas de escalamiento

- Continúa:
  - En muchos casos, el número a ser representado debía ser escalado hacia arriba o hacia abajo para caber en ese intervalo.
  - Naturalmente, al final del cómputo el resultado debía ser transformado nuevamente al dominio requerido por el usuario del sistema.
  - Téngase presente que sin estas transformaciones, el hardware **FXP** produciría resultados carentes sentido (producto de los múltiples overflows).

Problemas de escalamiento

- El problema del escalamiento incluye también la selección de un factor de escala adecuado:
  - Todo número en notación **FXP** de n dígitos de precisión en un base b al hacer uso de un factor de escala b^k representará un valor absoluto menor que b^k, resultando en un máximo error de $b^{-(n-k)} = b^{k-n}$., muy superior al máximo error usual b^{-n}.
  - Obsérvese que como nuestro punto de partida es el intervalo unitario, las variantes con $k = 0$ y $k = n$ corresponderán a **FXP** fraccionario y a **FXP** entero, respectivamente.

Problemas de escalamiento

- La pérdida de precisión producto de la utilización de un factor de escalamiento puede ser atendida de diversas formas.
- Una posibilidad es hacer uso de aritmética de punto fijo de múltiple precisión (es decir, usando múltiples palabras).
  - Claro está, hacer uso de más de una palabra para cada magnitud normalmente implica un mayor costo en tiempo de ejecución y en espacio de almacenamiento.

Problemas de escalamiento

- Para cálculos largos o complicados, este escalamiento y extensión de precisión implica un arduo análisis matemático y cómputo lateral para seguir los factores de escala o controlar las longitudes de las palabras.
- Una complicación adicional surge al considerar que sólo se puede usar un único factor de escala sobre un dado conjunto de operandos.
  - ¡Nótese que la introducción del escalamiento único acarreará pérdidas importantes de significancia!

Problemas de escalamiento

- Continúa:
  - La diferencia actual entre un factor de escala común b^k para un orden de magnitud b^z en un cierto número con algún $z < k$, creará $k - z - 1$ ceros a la izquierda, permitiendo sólo un máximo de $n - (k - z - 1)$ dígitos que aporten significancia, en lugar de los n que uno hubiera deseado.
  - En una cadena larga de cálculo la pérdida sucesiva de significancia desencadena situaciones singulares, las cuales el hardware no está en condiciones de manejar excepto con la intervención del programador.

Artimética de punto flotante

- En respuesta a todos estos cuestionamientos, se introdujo la representación de punto flotante en la década del '40.
- La idea central fue simplemente permitir que cada magnitud sea acompañada por su propio factor de escala a lo largo de la computación.
  - Es decir, las magnitudes preservarán hasta último momento la máxima precisión, ya que utilizarán en todo momento el menor factor de escala posible.

Artimética de punto flotante

- Recordemos que hay dos variantes de **FLP**:
  - Normalizada: opera con operandos normalizados a fin de preservar en todo momento la mayor cantidad de bits de significancia.
  - No normalizada: opera con operandos sin normalizar, dejando la decisión de llevar adelante el proceso de normalización en manos del programador.

Formatos de punto flotante

- La elección de un formato adecuado para representar números en punto flotante debe contemplar múltiples aspectos:
  - Evidentemente las características elegidas para **m**, **e** y **b** afectarán tanto el rango y como precisión de la representación resultante.
  - En particular, **m** y **e** comparten una o más palabras, por lo que asignar más bits de precisión a uno redunda en quitárselos al otro.

Formatos de punto flotante

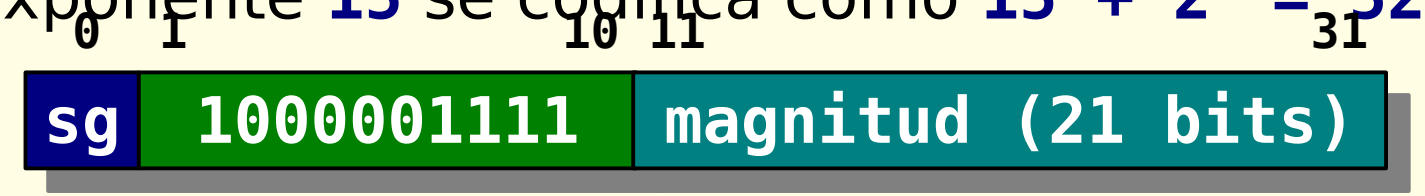
- Continúa:
  - Incrementar el rango asignando más dígitos al exponente va a restringir a la cantidad de dígitos disponibles para la mantisa, lo cual disminuirá la precisión.
  - En contraste, asignar una menor cantidad de bit al exponente conduce exactamente a lo opuesto (mejora la precisión a costa del rango).
  - Por último, el tercer parámetro, la base **b** elegida para la representación, tiene a su vez impacto tanto en el rango como en la precisión.

Formatos de punto flotante

- También hay otras decisiones menos críticas:
  - La mantisa puede ser entera ó fraccionaria (según se asuma el punto binario en el extremo derecho o izquierdo, respectivamente).
  - A su vez, la mantisa puede estar representado de cualquiera de las formas antes vistas.
  - El exponente será necesariamente un entero signado, si bien existen distintas formas de representación.
  - Finalmente, la base se elegirá de acuerdo a la longitud de palabra y a la precisión y al rango deseado, pero siempre ha de ser potencia de **2**.

Formatos de punto flotante

- Consideraciones acerca del exponente:
  - El exponente se suele representar en notación exceso.
  - Para **n** bits, los valores representados se polarizan en 2^{n-1}, es decir, el menor exponente representable es **0** y el mayor $2^n - 1$, simplificando las comparaciones.
  - Por caso, para un número en punto flotante de **32** bits, con **10** bits para el exponentes y **22** para la mantisa, el exponente **15** se codifica como $15 + 2^9 = 527$:



Formatos de punto flotante

- Consideraciones acerca de la base:
  - La base, al ser implícita, no consume espacio en la representación, por lo que podemos vernos tentados de adoptar una base más grande con el objeto de obtener un rango más amplio
  - Por caso, se han ensayado configuraciones con bases diversas tales como **2**, **4**, **8** e incluso **16**.
  - No obstante, el resultado al hacer uso de bases elevadas no fue satisfactorio (se perdía precisión).
  - En la actualidad se usa exclusivamente la base **2**.

Formatos de punto flotante

- Consideraciones acerca de la mantisa:
  - Con respecto a la mantisa, se deben tomar dos decisiones: qué representación adoptar y si se trabajará con mantisas normalizadas o no.
  - Estas decisiones están relacionadas, ya que la normalización de las mantisas es un procedimiento que variará en función de la representación elegida.
  - La idea básica del proceso de normalización consiste en descartar aquellos dígitos que no estén aportando significancia a la mantisa (por así decir, los “ceros a la izquierda”).

Proceso de normalización

- El proceso de normalización consiste en alterar la mantisa de manera controlada, esto es, sin que se afecte el valor representado.
  - Es decir, en caso de desplazar los bits de la mantisa a derecha, se debe compensar el corrimiento a izquierda del punto binario incrementando el exponente de manera acorde.
  - Caso contrario, en caso de desplazar los bits de la mantisa a izquierda, se debe compensar el corrimiento a derecha del punto binario decrementando el exponente de manera acorde.

Normalización en SM

- La representación **FLP** es inherentemente redundante, el mismo número puede ser representado en más de una forma:

$$1 \times 10^{18} = 0.1 \times 10^{19} = 0.01 \times 10^{20} = \ldots$$

  - En general es deseable en una implementación adoptar una única forma canónica.
  - Si la mantisa está codificada en **SM** fraccionaria y la base adoptada es **2**, se dice que la mantisa está normalizada si el dígito a la derecha del punto binario es distinto de cero, a saber:

$$0.1 \times 10^{19}$$

Normalización en RC y DRC

- Una fracción binaria en **RC** o en **DRC** se dice normalizada cuando el bit de signo difiere del bit a su lado (el bit más significativo de la mantisa).
  - Nótese que no habrá ceros al comienzo de la mantisa de un número normalizado positivo ni habrá unos al comienzo de un número normalizado negativo.
  - El rango de valores para una mantisa normalizada **m** representada en complemento a la base **r** resulta:

$$1 / b \leq |m| < 1$$

Hidden bit

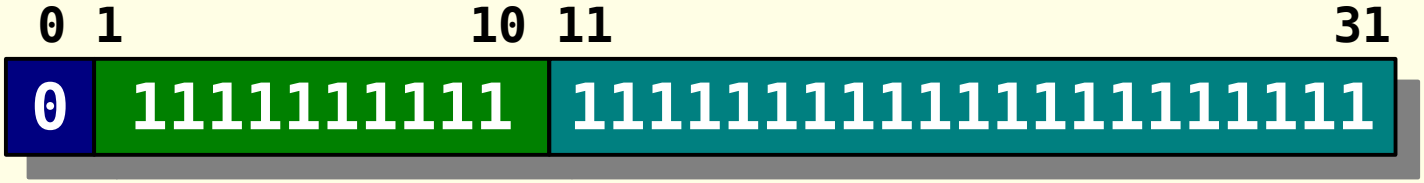
- En caso de trabajar con mantisas normalizadas y una base implícita **2**, aparece la posibilidad de optimizar la significancia:
  - Considerando que sólo se opera con magnitudes normalizadas, sabemos de antemano que el primer bit de significancia es siempre distinto al bit de signo.
  - Por ende, como el bit de signo siempre se almacena, se puede prescindir de ese primer bit de significancia.
  - Esta optimización, que permite duplicar la precisión de la mantisa, sólo es aplicable en este contexto en particular y se la denomina hidden bit.

Overflow y underflow

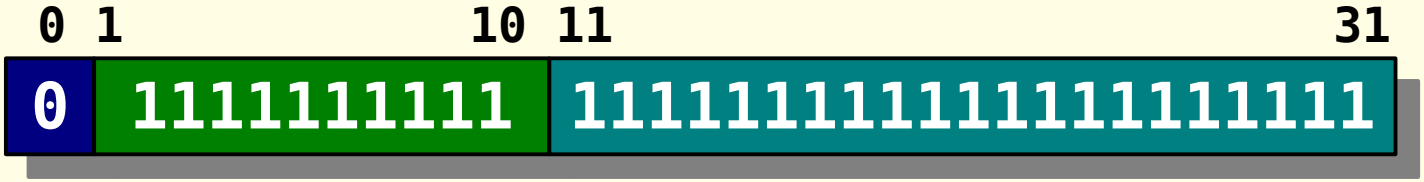
- Las operaciones de punto flotante pueden dar a lugar a situaciones singulares aún cuando estas sean aplicadas a datos perfectamente válidos.
  - Usaremos los símbolos **+∞** y **-∞** para referir a los quasi-infinitos positivos y negativos correspondientes a los números en notación **FLP** cuyo exponente excede el máximo valor positivo representable.
  - A su vez, usaremos los infinitesimales **+ε** y **-ε** (epsilon) para referir a aquellos números en notación **FLP** cuyo exponente excede al máximo valor negativo representable.

Overflow y underflow

- Por caso, para una representación **FLP** con **32** bits de precisión, **10** bits para el exponente (representado en exceso-**512**) y **22** para la mantisa fraccionaria en **SM** y base **2**:
  - Mayor positivo: $(-1)^0 \times (1 - 2^{-21}) \times 2^{511}$



  - Mayor positivo normalizado: $(-1)^0 \times (1 - 2^{-21}) \times 2^{511}$



Overflow y underflow

- Continúa:
  - Menor positivo: $(-1)^0 \times 2^{-21} \times 2^{-512}$

  - Menor positivo normalizado: $(-1)^0 \times 2^{-1} \times 2^{-512}$

  - Continuar el análisis para los mayores y menores negativos normalizados y sin normalizar.

Orden de magnitud cero

- Todo número en notación **FLP** cuya mantisa **m** sea cero se denominan orden de magnitud cero (**OMZ**).
  - El exponente **e** puede asumir cualquier valor válido.
  - Estos números surgen de efectuar el siguiente cálculo, para una mantisa **m** y un exponente **e** arbitrarios:

$$(m, e) - (m, e) = (0, e)$$

  - Esta familia de números representa un amplio rango de valores indeterminados que para una base **b** y **p** bits de precisión en la mantisa satisfacen que:

$$-b^{e-p} < (0, e) < b^{e-p}$$

Orden de magnitud cero

- Entre los valores que pertenecen al orden de magnitud cero se distingue aquel que tiene exponente cero como el verdadero cero.
- La totalidad de los números positivos y negativos representables son entonces:

$$+\varepsilon < +N < +\infty$$

$$-\infty < -N < -\varepsilon$$

- El verdadero cero constituye la línea divisoria entre estos rangos positivos y negativos.

Situaciones especiales

- Consideremos las siguientes operaciones aritméticas la cuales involucran números normalizados, infinitos, infinitesimales y **OMZ**s.
- Con operaciones de suma y de resta:

$\infty \pm N = \infty$	$N \pm \varepsilon = N$	$N - \infty = -\infty$
$\varepsilon - N = -N$	$\infty + \infty = \infty$	$\infty \pm \varepsilon = \infty$
$\varepsilon \pm \varepsilon = \varepsilon$	$\varepsilon - \infty = -\infty$	$\infty - \infty = \infty$
$N \pm z = N$	$z - N = -N$	$z_1 \pm z_2 = z_3$

Situaciones especiales

- Con la operación de multiplicación:

$\infty \times N = \infty$	$N \times \varepsilon = \varepsilon$	$\infty \times \infty = \infty$
$\varepsilon \times \varepsilon = \varepsilon$	$\infty \times \varepsilon = \infty$	$z_1 \times z_2 = z_3$
$N \times z_1 = z_2$		

- Con la operación de división:

$\infty / N = \infty$	$\varepsilon / N = \varepsilon$	$N / \infty = \varepsilon$
$N / \varepsilon = \infty$	$\infty / \varepsilon = \infty$	$\varepsilon / \infty = \varepsilon$
$\infty / \infty = \infty$	$\varepsilon / \varepsilon = \infty$	$z_1 / N = z_2$

Situaciones especiales

- Cabe acotar que muchas implementaciones eligen adoptar como resultados $\infty \times \varepsilon = \infty$ y $\varepsilon / \varepsilon = \infty$ en lugar de los también razonables $\infty \times \varepsilon = \varepsilon$ y $\varepsilon / \varepsilon = \varepsilon$, respectivamente, a fin de destacar esa situación a través de la señalización del overflow.
- El intento de ejecución de las operaciones N / z ó $N / 0$ será suprimido, activando el flag de división por cero y disparando generalmente la interrupción o el trap asociado.

Operaciones aritméticas

- Las cuatro operaciones estándar de suma, resta, multiplicación y división pueden operar sobre números en notación **FLP** con un mejor rango y precisión que en notación **FXP**.
- Asumidos los operandos $x_1 = (m_1, e_1)$ y $x_2 = (m_2, e_2)$, con $x_i = m_i \times b^{ei}$, siendo **b** la base implicada, analizaremos de qué manera se implementan cada una de estas cuatro operaciones al operar con operandos normalizados.

Operaciones aritméticas

- Nótese que la mantisa **m** será una fracción con **p** dígitos significativos (excluido el signo), dando el siguiente rango:

$$1 / b \leq |m| \leq 1 - b^{-p} < 1$$

- En el caso del exponente **e**, se trata de un número signado de **q** bits codificado en exceso b^{q-1}, tal que:

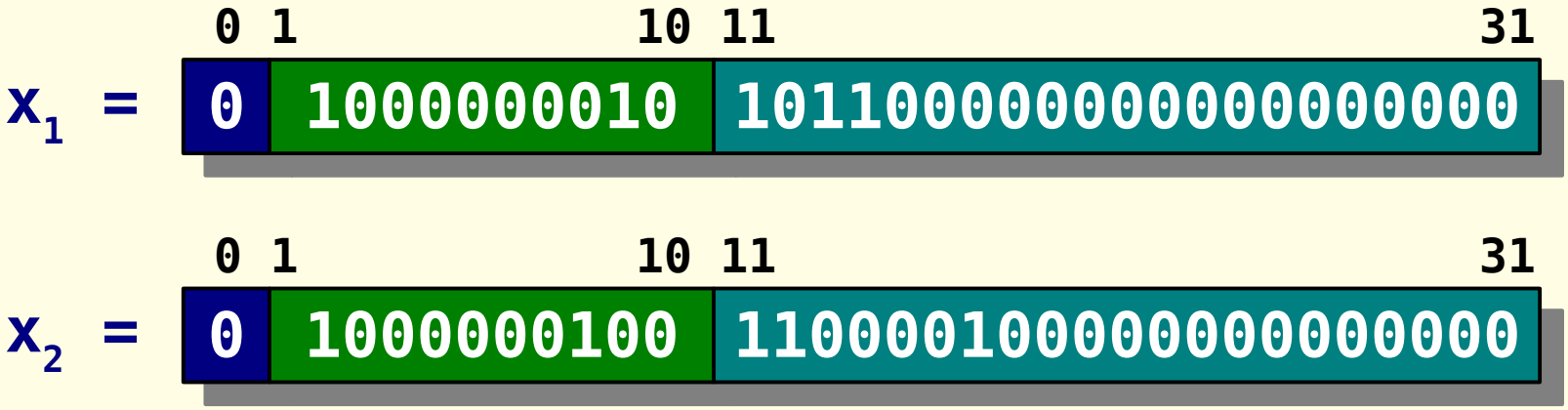
$$0 \leq |e| \leq b^{q} - 1$$

Operaciones artiméticas

- Algoritmo para la suma/resta:
  - Detectar el operando con mayor exponente.
  - Desplazar la mantisa del operando con menor exponente $|e_1 - e_2| \times \log_2 b$ lugares a la derecha, ajustando según corresponda su exponente.
  - Sumar o restar las mantisas (ya que ahora se trata de dos números con un mismo exponente).
  - De ser necesario, normalizar el resultado obtenido.

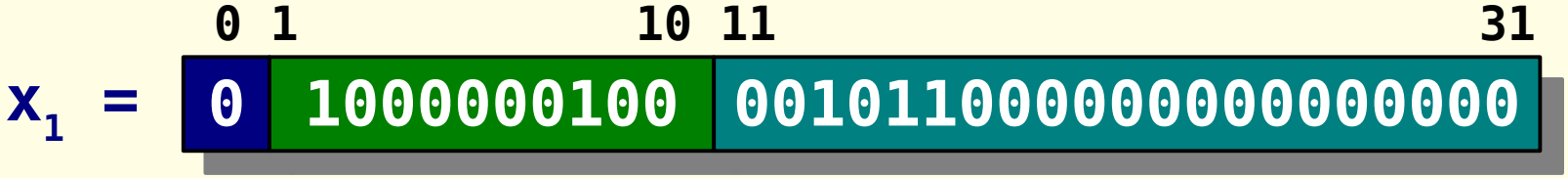
Ejemplo

- Haciendo uso de un formato **FLP** con **p = 22**, **q = 10** y **b = 2**, se desea calcular la suma de los valores $x_1 = 2.75$ y $x_2 = 12.125$.
  - Inicialmente tenemos que:

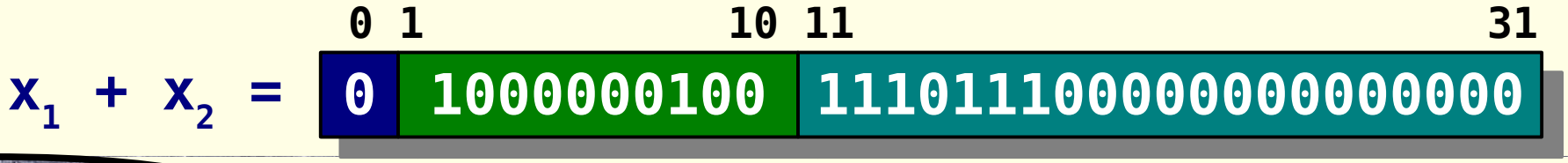


Ejemplo

- Continúa:
  - Desplazamos la mantisa del operando con menor exponente, x_1, $|514 - 516| \times \log_2 2 = 2$ lugares a derecha, ajustando el exponente de manera acorde:



  - Luego, sumamos las mantisas:



Ejemplo

- Continúa:
  - Nótese que el resultado intermedio obtenido ya está normalizado, por lo que ese es el resultado final.
  - Finalmente, podemos volver a convertir a notación **FXP** el resultado antes obtenido, a manera de verificación de que todo haya salido bien:

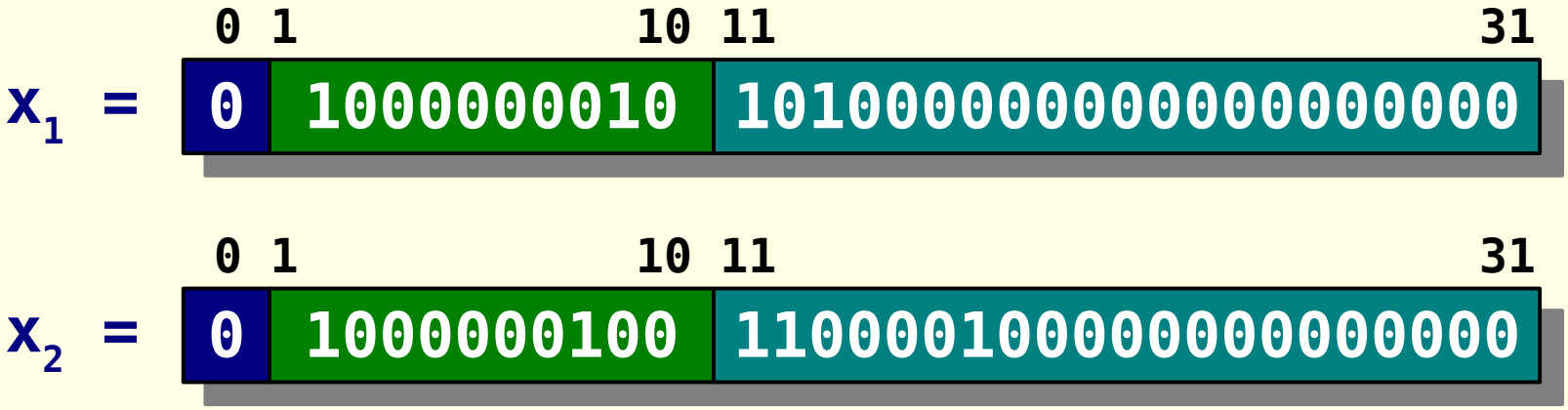
$$x_1 + x_2 = (-1)^{sg} \times m \times b^e$$
$$= (-1)^0 \times 0.9296875 \times 2^4$$
$$= 14.875$$ ☑

Operaciones artiméticas

- Algoritmo para la multiplicación:
  - Sumar los dos exponentes; éste será en principio el exponente del resultado.
  - Multiplicar las dos mantisas, lo que a su vez determina el signo del resultado.
  - Normalizar el resultado de ser necesario, corriendo la mantisa a la izquierda y ajustando el exponente de manera acorde.

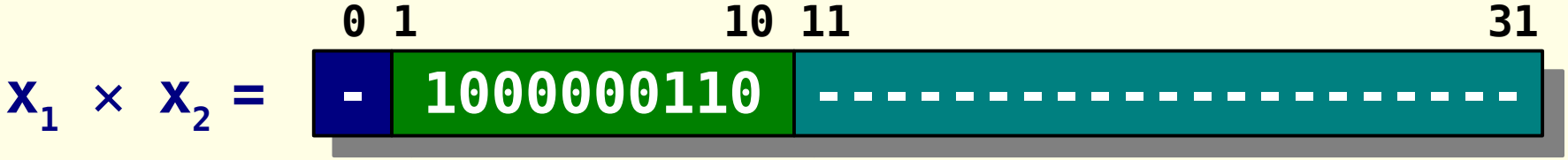
Ejemplo

- Haciendo uso de un formato **FLP** con $p = 22$, $q = 10$ y $b = 2$, se desea calcular el producto de los valores $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 12.125$.
  - Inicialmente tenemos que:

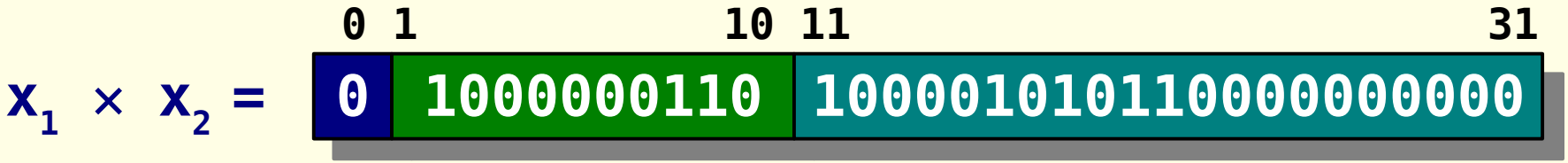


Ejemplo

- Continúa:
  - El exponente del resultado resulta (luego de ajustar de manera adecuada el exceso):



  - Luego, la mantisa y el signo resultan (en este paso en principio descartamos los **p** bits menos significativos del producto):



Ejemplo

- Continúa:
  - Nótese que el resultado intermedio obtenido nuevamente ya está normalizado, por lo que ese es el resultado final.
  - Finalmente, podemos volver a convertir a notación **FXP** el resultado antes obtenido, a manera de verificación de que todo haya salido bien:

$$x_1 \times x_2 = (-1)^{sg} \times m \times b^e$$
$$= (-1)^0 \times 0.52099609375 \times 2^6$$
$$= 33.34375$$ ☑

Operaciones aritméticas

- Algoritmo para la división:
  - Restar los dos exponentes (este será en principio el exponente del resultado).
  - Dividir las dos mantisas (lo que a su vez determina el signo del resultado).
  - Normalizar el resultado de ser necesario, corriendo la mantisa a la derecha y ajustando el exponente de manera acorde.

Observaciones

- Al calcular una suma o una resta, la mantisa del resultado se ubica necesariamente en el siguiente rango:

$$0 \leq |m| < 2$$

- Esto constituye un inconveniente cuando $1 \leq |m| < 2$, situación que se denomina overflow de mantisa u overflow virtual.
  - Para solucionar esta situación simplemente se corre la mantisa un lugar a derecha, ajustando el exponente de manera acorde.

Observaciones

- En caso de obtenerse un **OMZ** como resultado, se debe tener en cuenta que no será posible normalizarlo.
- Al calcular una multiplicación o una división es posible calcular en paralelo la mantisa y el exponente del resultado:

$$1 / b^2 \leq |m_1 \times m_2| < 1 \text{ (si } m_1 \neq 0 \text{ y } m_2 \neq 0 \text{)}$$

$$1 / b < |m_1 / m_2| < b \text{ (si } m_2 \neq 0 \text{)}$$

Observaciones

- Luego de la multiplicación, pueden suscitarse dos escenarios:
  - Cuando $1 / b \leq |m1 \times m2| < 1$, no hace falta corregir la mantisa (pues ya está normalizada).
  - Cuando $1 / b^2 \leq |m1 \times m2| < 1 / b$, hay que corregir la mantisa (pues no está normalizada).
- La corrección de la mantisa, de requerirse, equivale a efectuar el siguiente cálculo:

$$(m_1, e_1) \times (m_2, e_2) = (m_1 \times m_2 \times b, e_1 + e_2 - 1)$$

Observaciones

- Para el caso de la división, nunca hace falta normalizar, pues se presentan los siguientes escenarios:
  - Si $m_1 < m_2$, entonces m_1 / m_2 ya está normalizado pues se verifica que $1 / b \leq |m_1 / m_2| < 1$.
  - Caso contrario, cuando $m_1 \geq m_2$, con $m_2 \neq 0$, se presenta un overflow virtual si $1 \leq |m_1 / m_2| < b$, cuyo ajuste correspondiente es el siguiente:

$$(m_1, e_1) / (m_2, e_2) = (m_1 / m_2 \times b^{-1}, e_1 - e_2 + 1)$$

¿Preguntas?