

Fuzzy Logic (Lógica Difusa)

Lógica para Ciencias de la Computación

Primer Cuatrimestre de 2009

– Material Adicional –

Motivación

- ❖ La **lógica difusa** es una de las ramas de la matemática.
- ❖ Permite que las computadoras puedan modelar el mundo de una manera similar a la adoptada por las personas.
- ❖ Provee un mecanismo simple para razonar con información **vaga**, **ambigua** o **imprecisa**.

Ventajas

- ❖ La lógica clásica no admite espacios grises entre lo “**verdadero**” y lo “**no verdadero**”, también conocido como “**falso**”.
- ❖ Muchos de los conceptos que manipulamos a diario no encajan en esa categoría:
 - ▶ ¿Hace **frío**?
 - ▶ ¿Es **pesado** eso?
 - ▶ ¿Sigo siendo **joven**?

Difuso vs. Preciso

- ❖ La lógica difusa permite definir conceptos incluso aún cuando no estén formulados de forma precisa.
- ❖ Para poder abordar esta lógica es necesario entender la relación existente entre la **lógica clásica** y los **conjuntos convencionales**.
- ❖ Este punto de contacto lo provee el álgebra asociada a la lógica en cuestión.

Relación entre la Lógica y los Conjuntos

- Sea $p(X)$ el predicado “ X es par”, y sea $q(X)$ el predicado “ X es menor a 10”.
- P denota al conjunto $\{0, 2, 4, \dots\}$
- Q denota al conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$
- $\neg P$ denota al conjunto $\{1, 3, 5, \dots\}$
- $P \wedge Q$ denota al conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $P \vee Q$ denota al conjunto $\{0, \dots, 9, 10, 12, \dots\}$

Función de Pertenencia

- Hemos visto que todo conjunto tiene asociado una **función de pertenencia**.
- La idea es que a partir de un cierto elemento se pueda determinar si éste pertenece o no al conjunto en cuestión.
- La teoría de la lógica difusa se basa en el concepto de **conjunto difuso**, lo que conlleva al concepto de función de **pertenencia parcial** (*también difusa o gradual*).

¿Con Cuanta Temperatura Hace Mucho Calor?



- Bajo el acercamiento tradicional, **30°** se considera caluroso, pero **28°** no.
- En cambio, bajo el acercamiento difuso, tanto **28°** como **30°** se ubican en la frontera del conjunto difuso.

Función de Pertenencia Parcial (o Gradual)

¿Qué tan joven es pepe?

▶ si *pepe* tiene 1 año, $JOVEN(pepe) = 1.0$.

y se lee “*pepe* \in *JOVEN* con grado 1.0” o “el grado de pertenencia de *pepe* a *JOVEN* es 1.0”

▶ si *pepe* tiene 25 años, $JOVEN(pepe) = 0.8$.

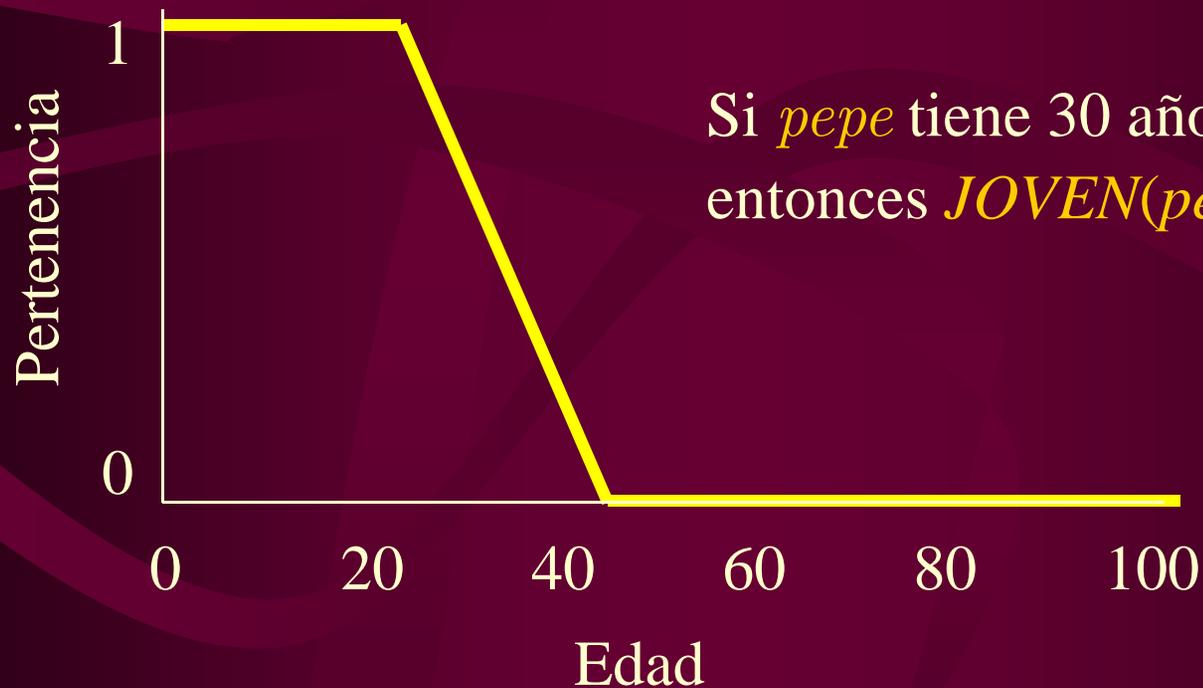
▶ si *pepe* tiene 35 años, $JOVEN(pepe) = 0.2$.

▶ si *pepe* tiene 50 años, $JOVEN(pepe) = 0.00$.

El grado de pertenencia de un elemento a un conjunto difuso se representa a través de un número en el intervalo real $[0, 1]$.

Función de Pertenencia Parcial

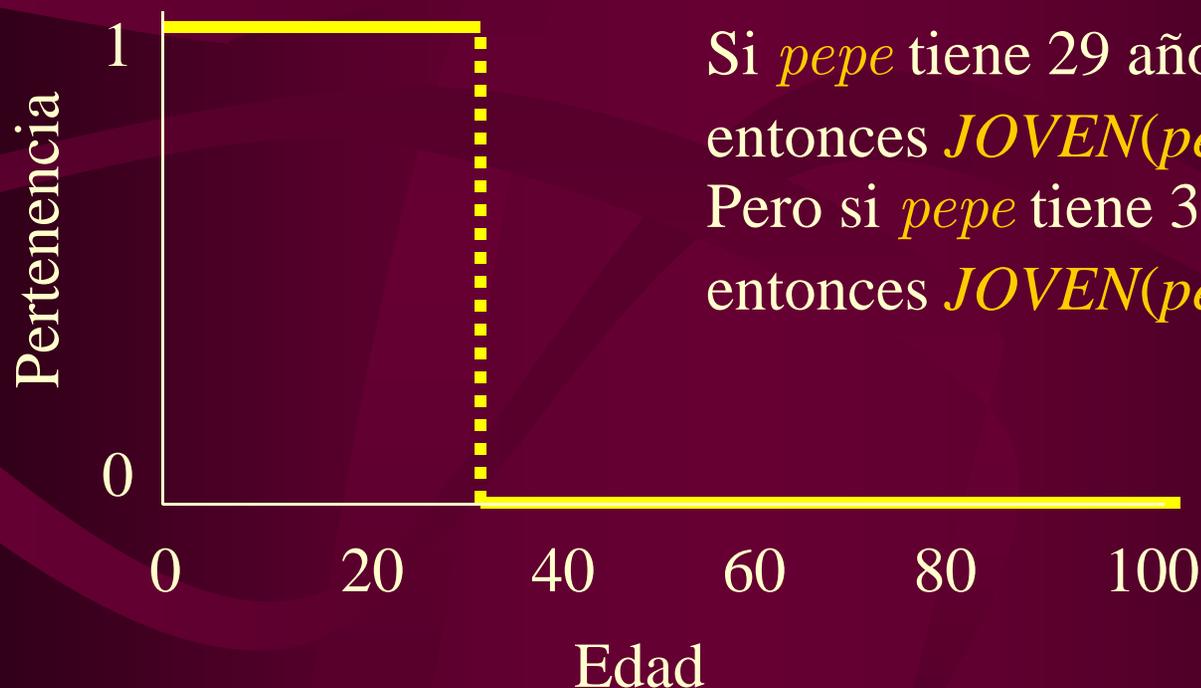
¿Qué tan joven es pepe?



Si *pepe* tiene 30 años,
entonces $JOVEN(pepe) = 0.5$

Contraste con las Funciones de Pertenencia Usuales

❖ ¿Qué tan joven es pepe?



Si *pepe* tiene 29 años,
entonces $JOVEN(pepe) = 1$
Pero si *pepe* tiene 30 años,
entonces $JOVEN(pepe) = 0$

Funciones de Pertenencia Parciales vs. Probabilidades

- ❖ No deben confundirse las funciones de pertenencia parcial con las distribuciones de probabilidades, más allá de las aparentes similitudes.
- ❖ Regla Práctica: las probabilidades hablan de eventos que aún no han sucedido, mientras que la pertenencia o no a un conjunto es un evento del pasado.

Modificadores Difusos

- Una vez caracterizado un cierto concepto difuso (e.g., alto, caliente, elegante, etc.), se pueden crear infinitas variantes apelando a los **modificadores difusos**.

- ➔ Si $A(X) = c$, “muy A ”(X) = c^2

- ➔ Si $A(X) = c$, “muy muy A ”(X) = $(c^2)^2 = c^4$

- ➔ Si $A(X) = c$, “apenas A ”(X) = $c^{1/2}$

Modificadores Difusos

Si *pepe* tiene 25 años:

➔ $JOVEN(pepe) = 0.80$

➔ $muy\ JOVEN(pepe) = 0.80^2 = 0.64$

➔ $muy\ muy\ JOVEN(pepe) = 0.80^4 = 0.41$

➔ $apenas\ JOVEN(pepe) = 0.80^{1/2} = 0.89$

Si *pepe* tiene 35 años:

➔ $JOVEN(pepe) = 0.20$

➔ $muy\ JOVEN(pepe) = 0.20^2 = 0.04$

➔ $muy\ muy\ JOVEN(pepe) = 0.00$

➔ $apenas\ JOVEN(pepe) = 0.20^{1/2} = 0.44$

Categorías de Modificadores Difusos

- ❖ Los modificadores difusos se clasifican en tres grandes categorías:
 - ➔ Los **dilatadores**, que diluyen el efecto del concepto difuso (eg., un tanto, apenas, etc.)
 - ➔ Los **concentradores**, que enfatizan el efecto del concepto difuso (eg., muy, requete, etc.)
 - ➔ Los **contrastadores**, que cambian el nivel de incertidumbre del concepto difuso (eg., tal vez).

Lógica Difusa

- La lógica difusa se construye en torno a las funciones de pertenencia parcial.
- Estas funciones se estructuran en objetos de mayor complejidad mediante los conectivos lógicos usuales:
- Sean **A** y **B** funciones de pertenencia parcial.
Para todo X, Y :
 - ➔ $A(X) \wedge B(Y) =_{def} \text{mín}(A(X), B(Y))$.
 - ➔ $A(X) \vee B(Y) =_{def} \text{máx}(A(X), B(Y))$.
 - ➔ $\neg A(X) =_{def} 1.0 - A(X)$.

Lógica Difusa

- Volviendo al ejemplo anterior:



Reglas Difusas

- Una regla difusa tiene la forma

Ant \rightarrow Cons

donde:

- ▶ Ant (antecedente) es una expresión involucrando “pertenencias difusas”, modificadores difusos y operadores difusos (and, or y not).
- ▶ Cons (consecuente) es simplemente una “pertenencia difusa”

Ejemplo

R1: Fresca(temp) \rightarrow Alto(niv_cal)

“Si la temperatura es *fresca*, entonces el nivel a setear el calentador es *alto*”.

R2: muy Joven(edad) \wedge Alta(pot_auto) \rightarrow Alto(riesgo)

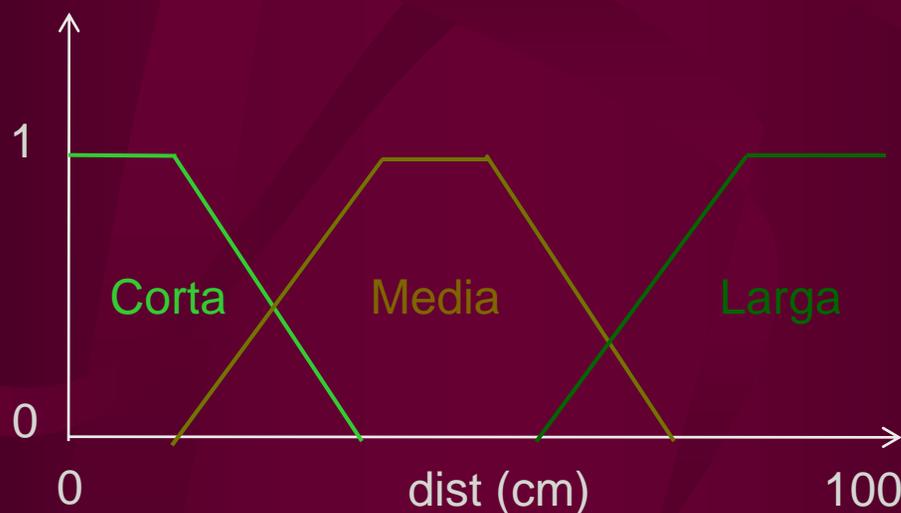
“Si el (potencial) cliente de una aseguradora es *muy joven* y la potencia de su auto es *alta*, entonces el riesgo de asegurarlo es *alto*”.

Ejemplo de Aplicación

- Para ilustrar la dinámica básica de un sistema difuso involucrando reglas, consideremos un ejemplo de aplicación simple.
- Dominio:
 - Robotito con ruedas que lleva café a los empleados de una empresa.
 - Pueden interponérsele obstáculos de manera imprevista (ejemplo, personas).
 - Debe frenar para evitar chocar, pero en lo posible debe hacerlo suavemente (sin brusquedad).
- Se desea implementar un sistema de control de freno para lograr un “frenado gradual”.
- Para ello se decide emplear lógica difusa.

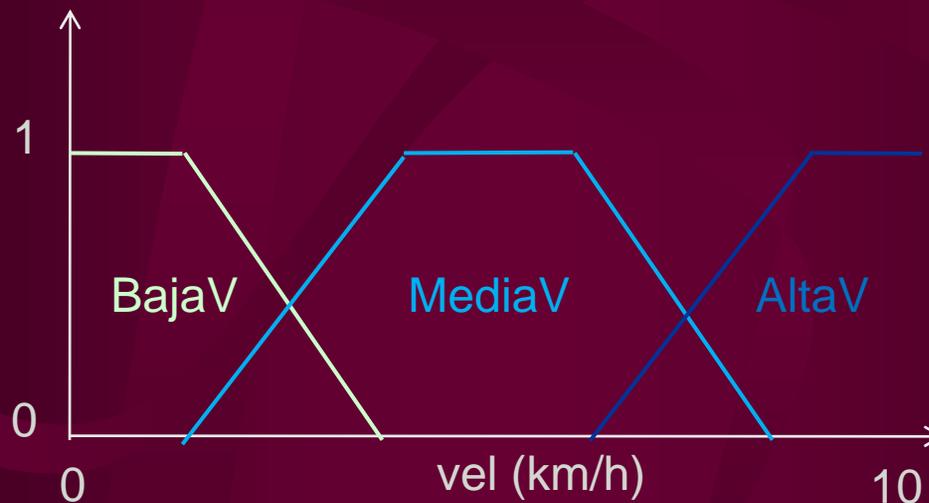
Modelando Conceptos Difusos

- Para calcular la potencia de frenado, el sistema difuso tendrá en cuenta la distancia del robot al obstáculo (distancia corta, media o larga).
- De esta forma se definen conjuntos difusos Corta, Media y Larga mediante las siguientes funciones de pertenencia difusa:



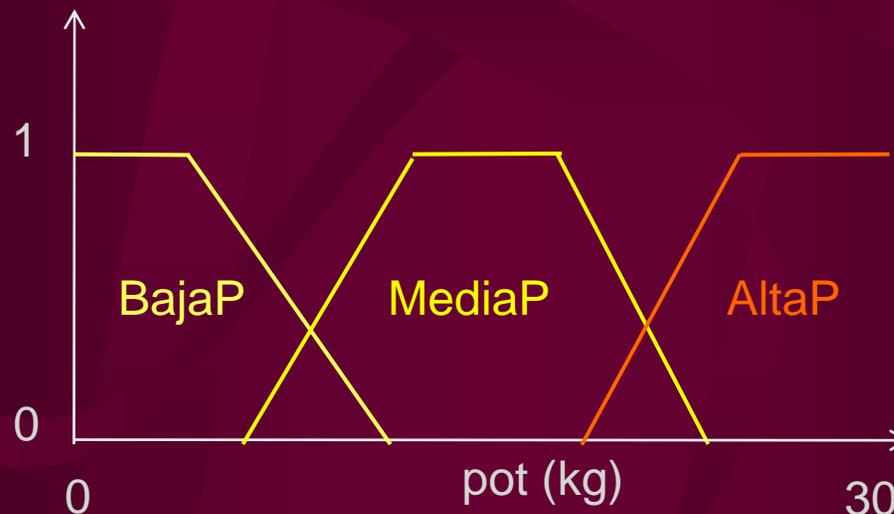
Modelando Conceptos Difusos

- Para calcular la potencia de frenado, también se tendrá en cuenta la velocidad de desplazamiento actual del robot (velocidad baja, media o alta).
- De esta forma se definen conjuntos difusos BajaV, MediaV y AltaV mediante las siguientes funciones de pertenencia difusa:



Modelando Conceptos Difusos

- Finalmente se definen conjuntos difusos de potencias de frenado (potencia alta, media y baja).
- Concretamente se definen conjuntos difusos BajaP, MediaP y AltaP mediante las siguientes funciones de pertenencia difusa:



Reglas difusas

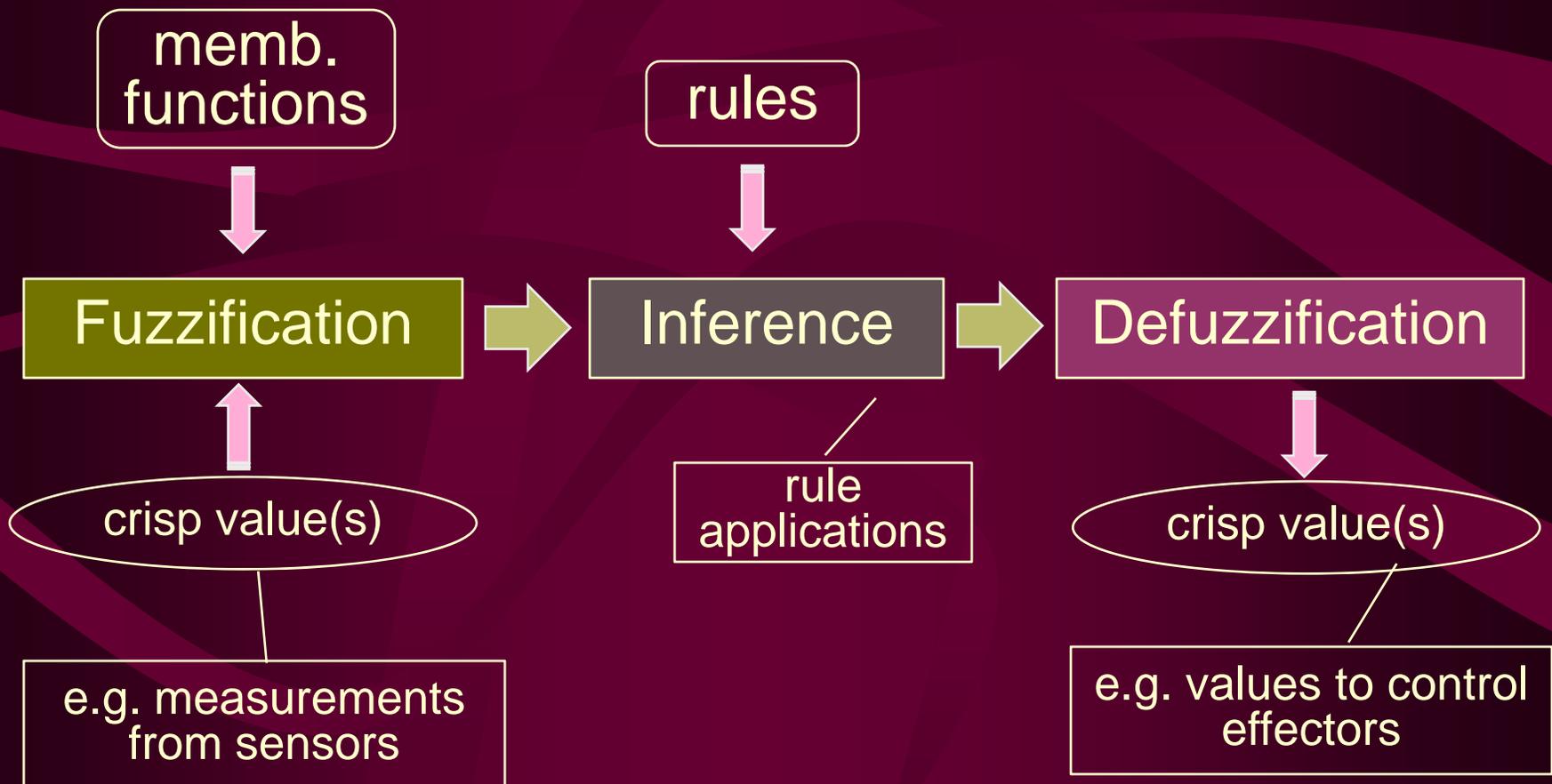
R1: $\text{Corta}(\text{dact}) \wedge \text{algo AltaV}(\text{vact}) \rightarrow \text{AltaP}(\text{pot})$

“Si la distancia actual al obstáculo (dact) es *corta* y la velocidad actual (vact) es *algo alta*, entonces la portencia de freno a aplicar (pot) es *alta*”.

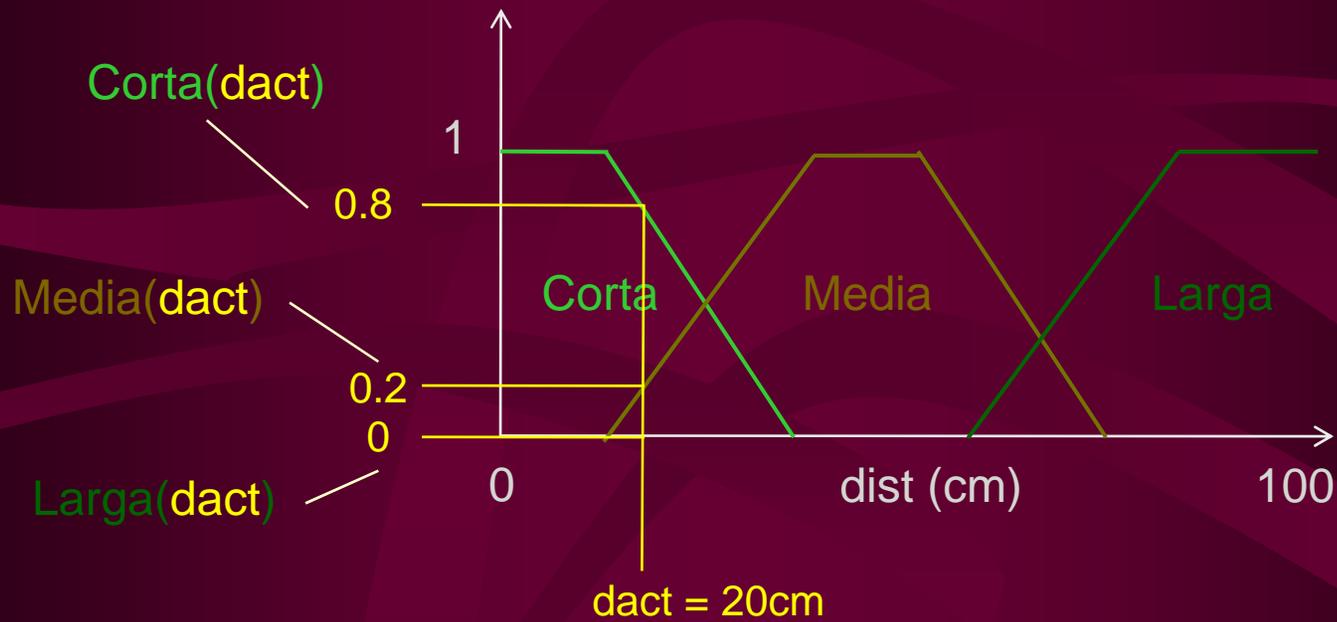
R2: $\text{Media}(\text{dact}) \wedge \text{MediaV}(\text{vact}) \rightarrow \text{MediaP}(\text{pot})$

R3: $\text{Larga}(\text{DAct}) \vee \text{BajaV}(\text{VAct}) \rightarrow \text{BajaP}(\text{Pot})$

Dinámica Básica de un Sistema Difuso

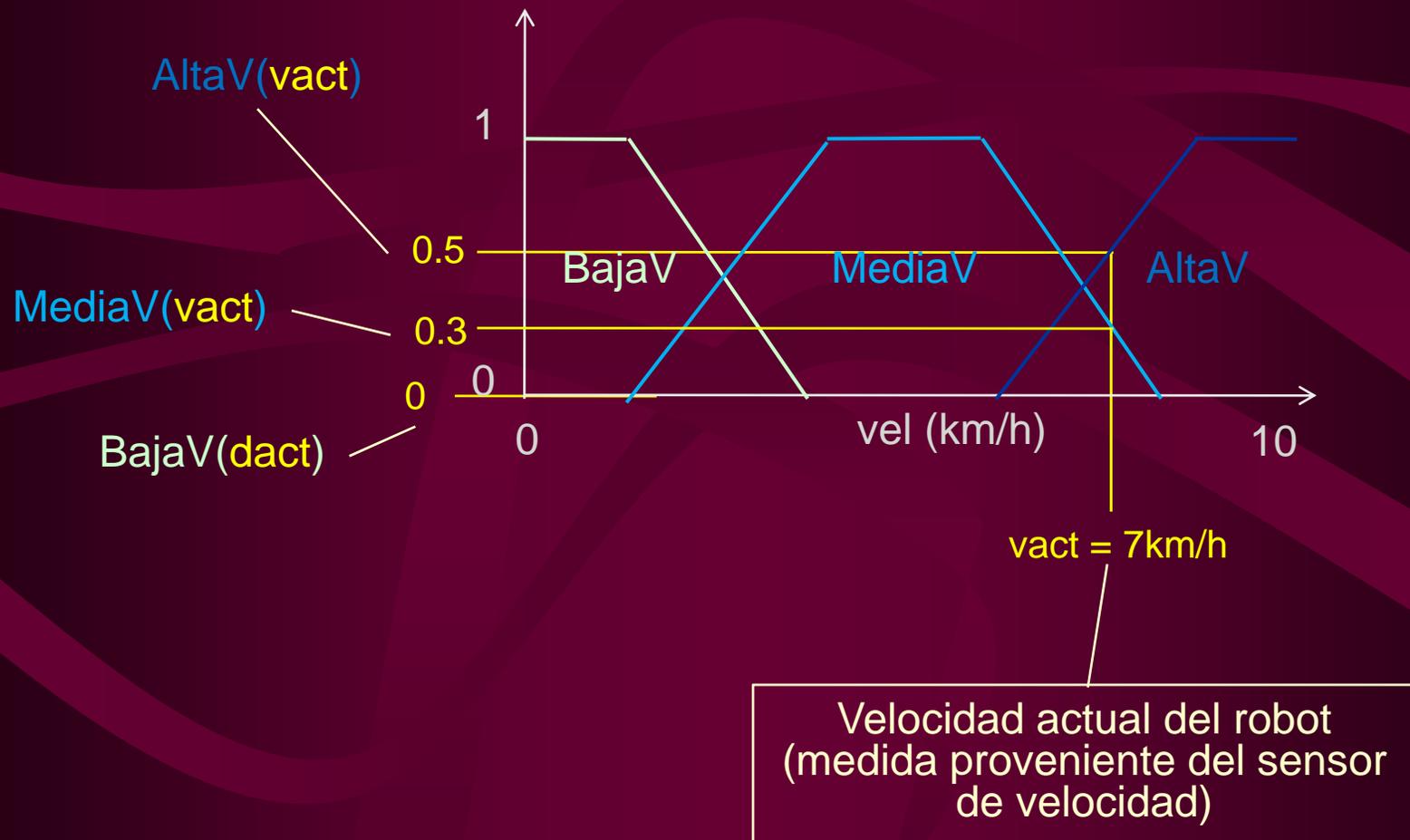


Fuzzificación



Distancia actual al obstáculo
(medida proveniente del sensor
de proximidad del robot)

Fuzzificación



Inferencia(1)

Corta(dact)=0.8

BajaV(vact)=0

Media(dact)=0.2

MediaV(vact)=0.3

Larga(dact) = 0

AltaV(vact) = 0.5

R1: $\underbrace{\text{Corta(dact)} \wedge \text{AltaV(vact)}} \rightarrow \text{AltaP(pot)}$

$\min(0.8, 0.5^{1/2}) = 0.71 \Rightarrow$ Nivel de activación de la regla

R2: $\underbrace{\text{Media(dact)} \wedge \text{MediaV(vact)}} \rightarrow \text{MediaP(pot)}$

0.2

R3: $\underbrace{\text{Larga(DAct)} \vee \text{BajaV(VAct)}} \rightarrow \text{BajaP(Pot)}$

0

Inferencia(2)

- Existen diferentes formas de definir el resultado de una regla.
- Uno de los métodos más usados y simples consiste en dar a la función de pertenencia del consecuente el valor de verdad asociado a la premisa.

Inferencia(2')

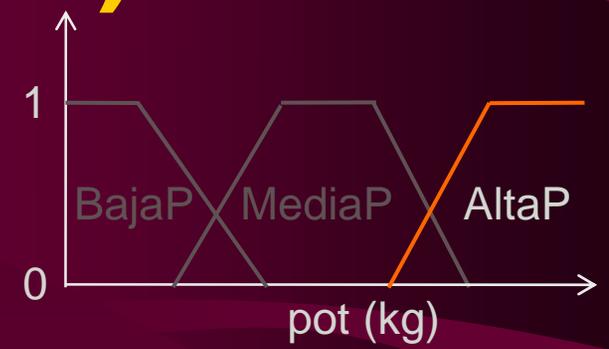
R1: Corta(dact) \wedge algo AltaV(vact) \rightarrow AltaP(pot)

0.71

Inferencia(2')

R1: $\underbrace{\text{Corta}(\text{dact}) \wedge \text{algo } \text{AltaV}(\text{vact})}_{0.71} \rightarrow$

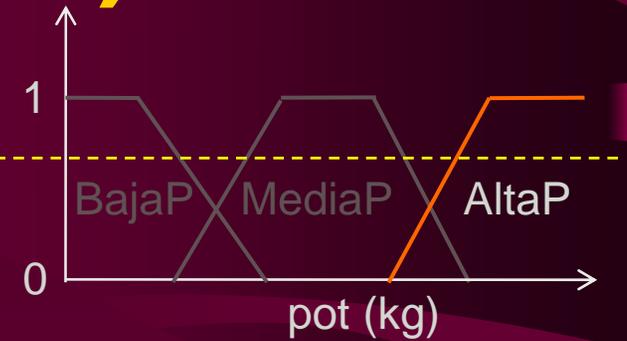
0.71



Inferencia(2')

R1: $\underbrace{\text{Corta}(\text{dact}) \wedge \text{algo AltaV}(\text{vact})}_{0.71} \rightarrow$

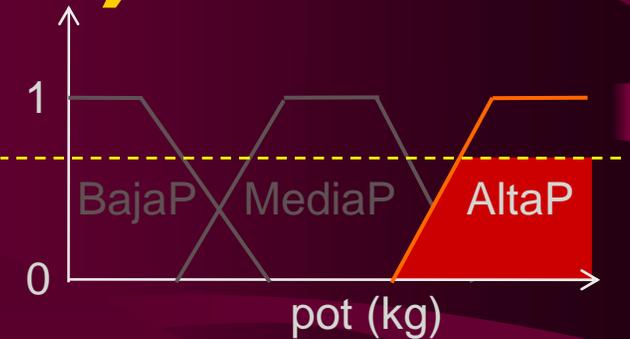
0.71



Inferencia(2')

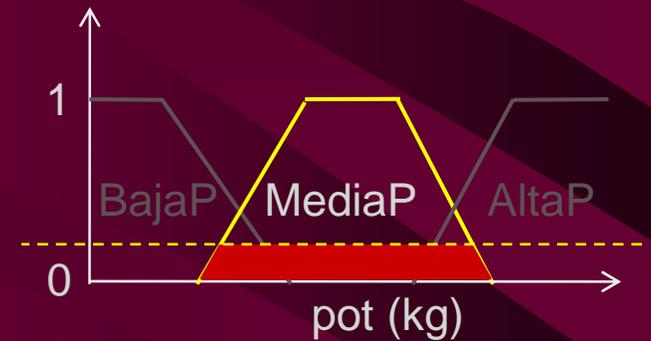
R1: $\underbrace{\text{Corta}(\text{dact}) \wedge \text{algo } \text{AltaV}(\text{vact})}_{0.71} \rightarrow$

0.71



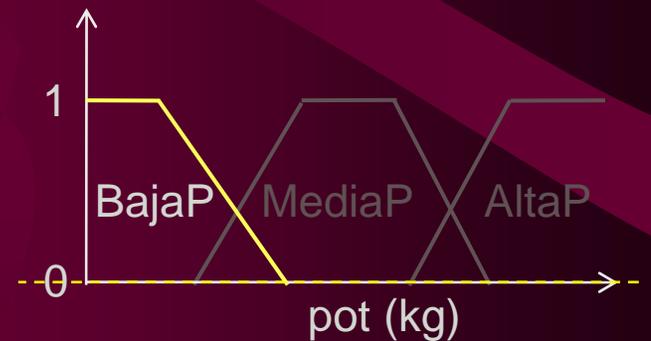
R2: $\underbrace{\text{Media}(\text{dact}) \wedge \text{MediaV}(\text{vact})}_{0.2} \rightarrow$

0.2



R3: $\underbrace{\text{Larga}(\text{DAct}) \vee \text{BajaV}(\text{VAct})}_{0} \rightarrow$

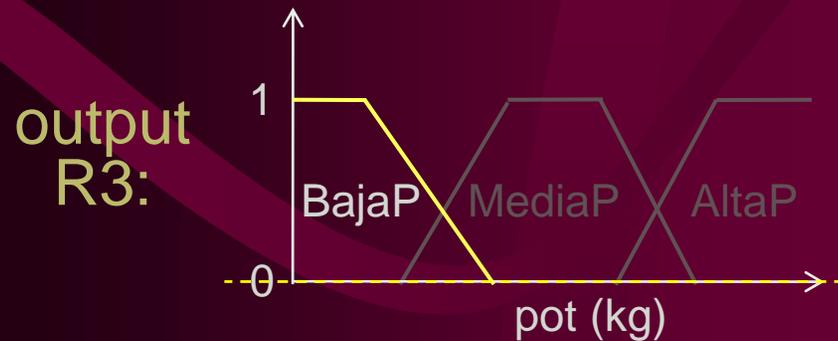
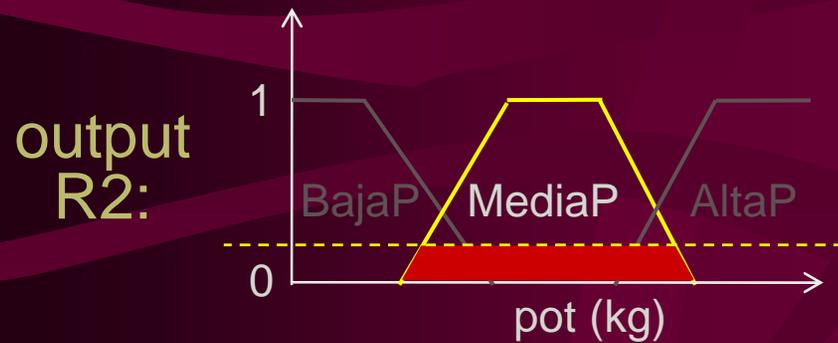
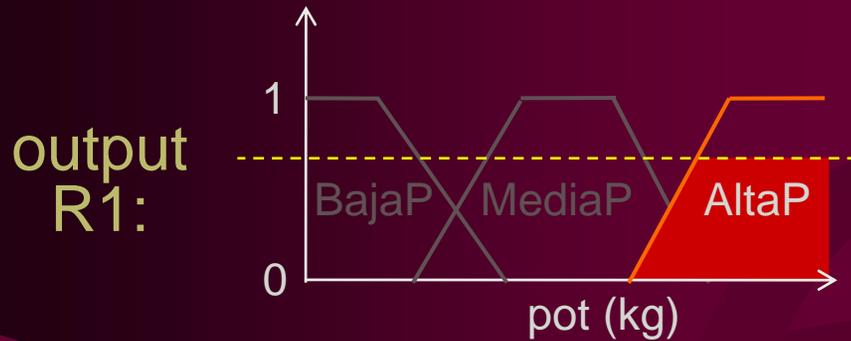
0



Inferencia(3)

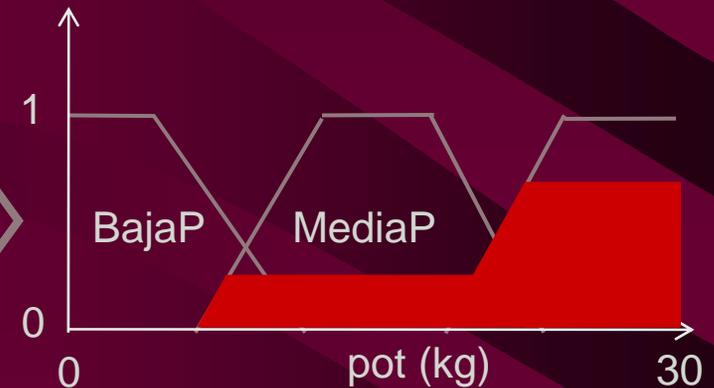
- Luego de aplicar todas las reglas, las áreas resultantes se combinan aplicando la *norma del Máximo* (o disyunción).
- De esta forma obtenemos una única curva caracterizando en forma difusa el output final del sistema.

Inferencia(3')



max-norm

Resultado del proceso de inferencia



Pero... ¿exactamente qué potencia debe imprimirse a los frenos?

¡defuzzificación!

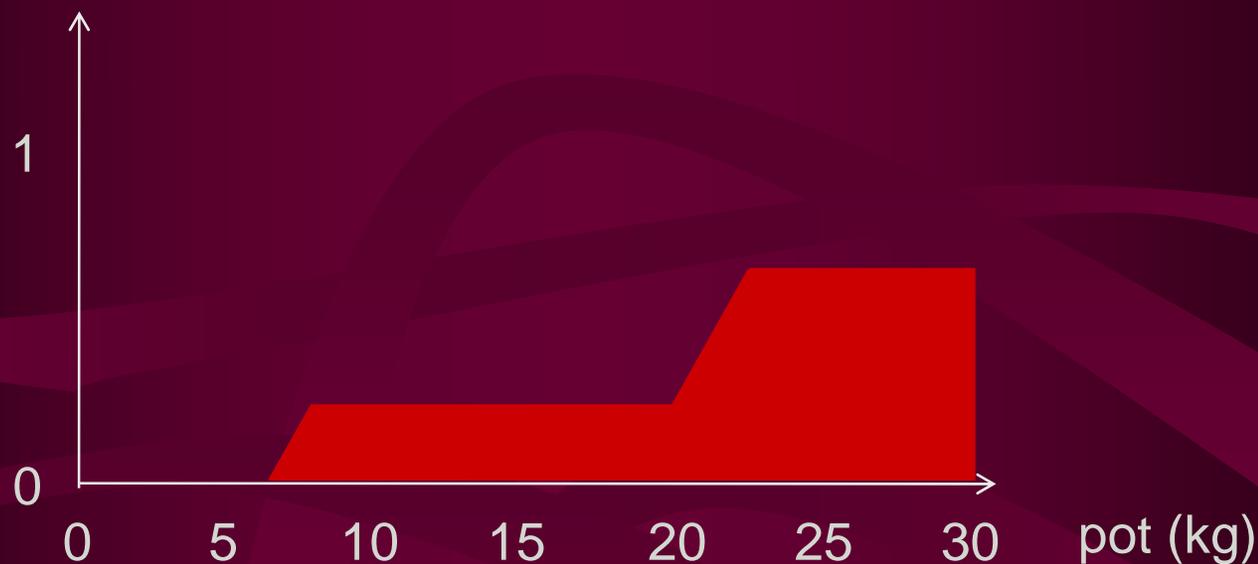
Defuzzificación

- ❖ La defusificación consiste en convertir un concepto definido a través de operadores difusos a **un valor nítido o crisp value** (es decir, lo contrario a difuso).
- ❖ Diversos **mecanismos** han sido propuestos para poder encontrar ese valor en concreto, el cual representa fielmente a la totalidad del concepto difuso.

Mecanismos de Defuzzificación

- ❖ Aún **no existe un estándar** universalmente aceptado.
- ❖ Una posibilidad consiste en elegir como representante a aquel elemento del conjunto difuso que presente el **mayor grado de pertenencia**. Si hay más de uno, selecciono cualquiera.

Defuzzificación: Ejemplo



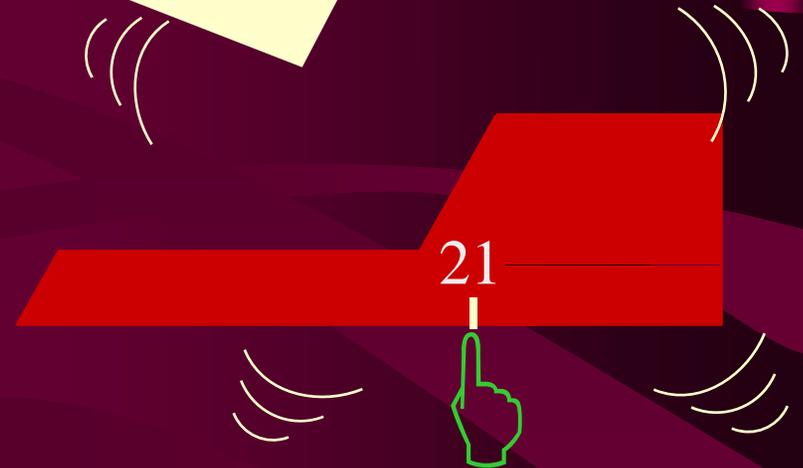
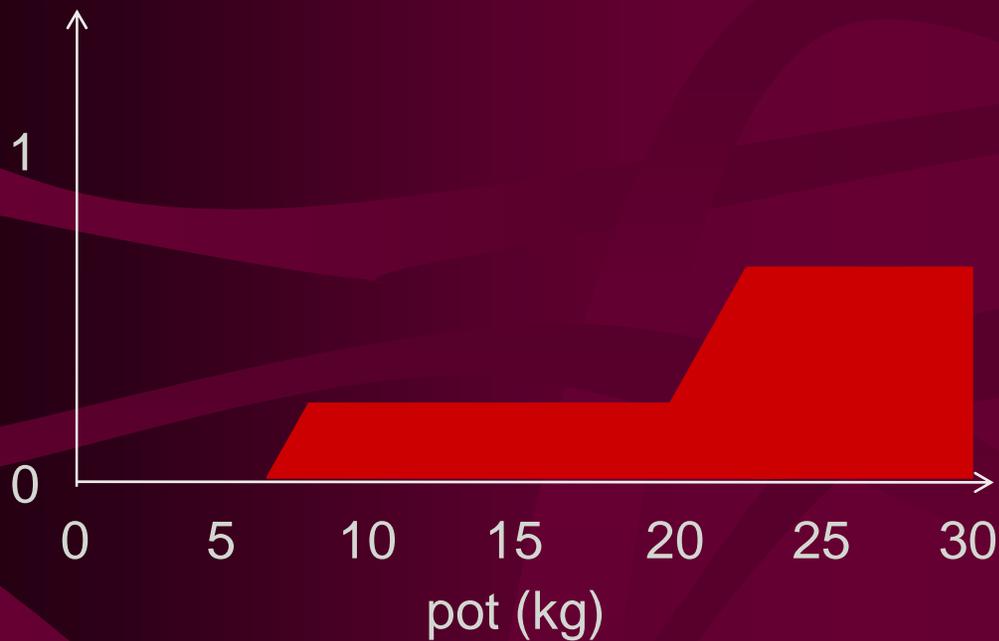
Criterio de selección del Representante: elem. con mayor grado de pertenencia.

25 kg, por ejemplo

Mecanismos de Defuzzificación

- Otra posibilidad consiste en encontrar el **centro de gravedad** de la figura dibujada por el concepto difuso.

Defuzzificación: Ejemplo



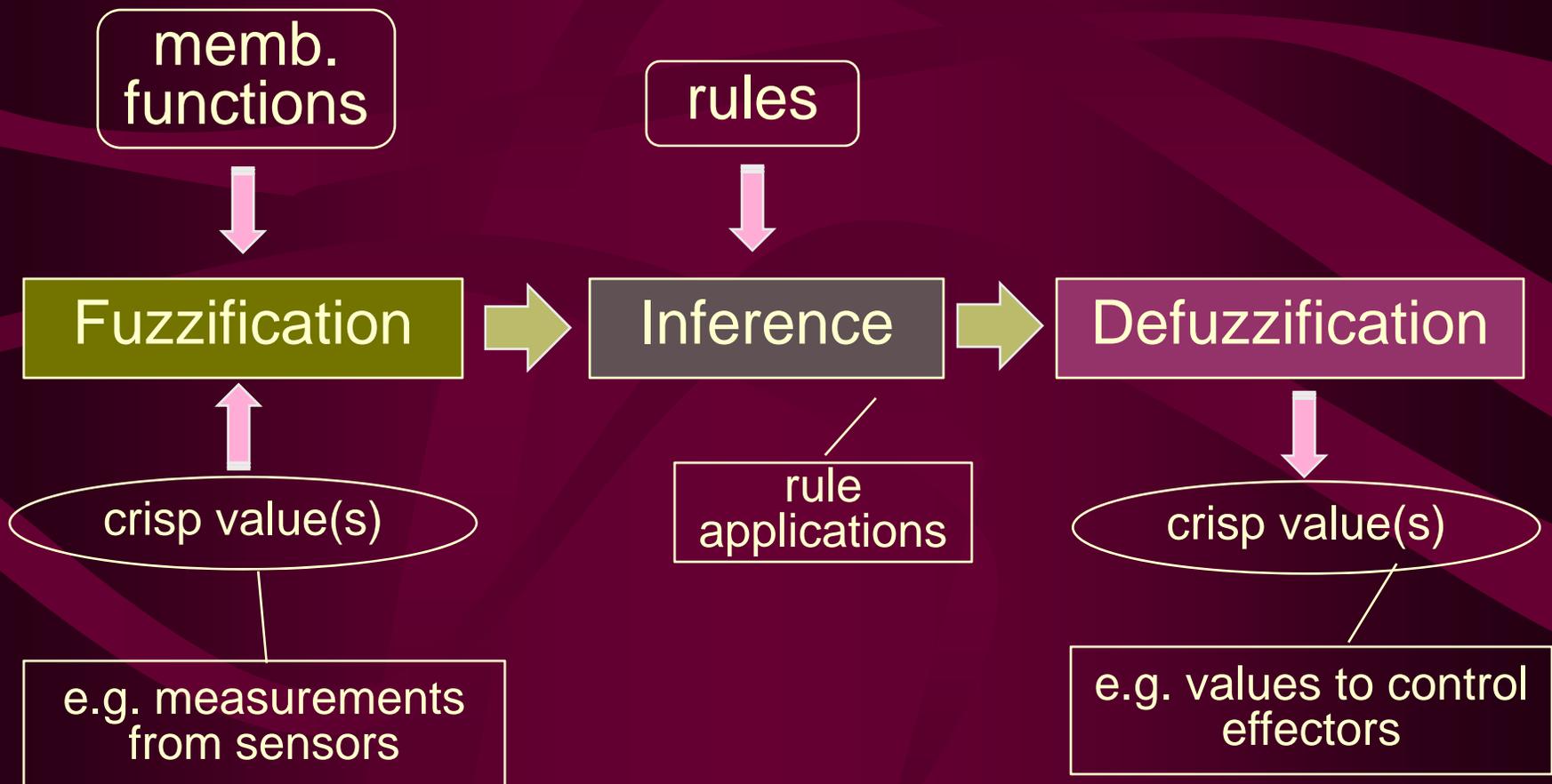
Criterio de selección del Representante: centro de gravedad.

21 kg

Mecanismos de Defuzzificación

- ❖ Otra posibilidad consiste en encontrar el **centro de gravedad** de la figura dibujada por el concepto difuso.
- ❖ O bien, calcular el **promedio pesado** entre todos los miembros del concepto difuso.

Dinámica Básica de un Sistema Difuso



Aplicaciones

- ❁ Controladores difusos:
 - ➔ Electrodomésticos (microondas, tostadoras, lavarropas).
 - ➔ Foco automático en cámaras fotográficas
 - ➔ Sistemas de control industriales
 - ➔ Mejora en la eficiencia del uso de combustible en motores
- ❁ Sistemas de reconocimiento de escritura.
- ❁ Área activamente bajo de desarrollo, tanto teórico como práctico.