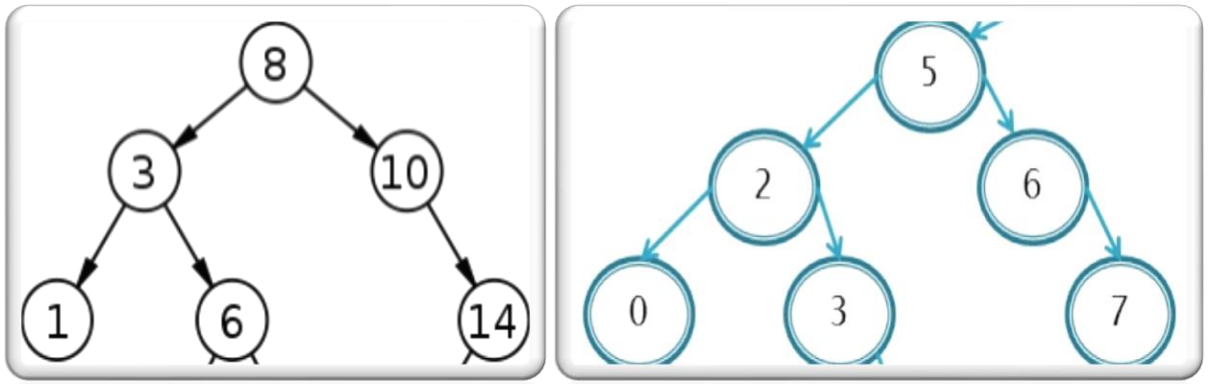
[Estructuras de Datos]



ARBOLES BINARIOS.

Copyright

Recursos adicionales

Enlaces externos de interés

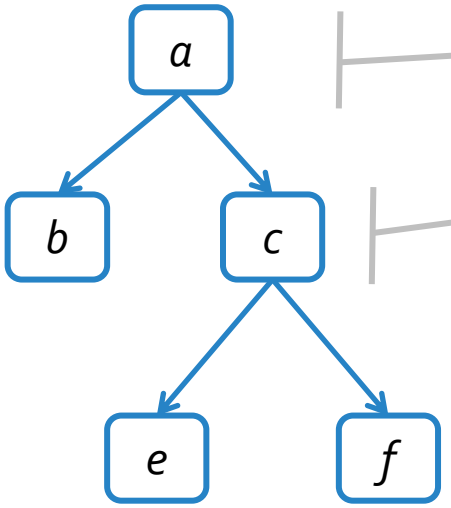
- Acceda a información útil mediante enlaces externos a:
  - **código fuente** disponible de forma **online**.
  - **otro material** disponible de forma **online**.

ÁRBOLES BINARIOS

Introducción: ¿qué es un árbol binario?

- Un **árbol binario** es un **TDA** que almacena una **colección de elementos** de forma **jerárquica**.
- Los **elementos** de un árbol son representados mediante **nodos**.
- Cada **nodo n**, a excepción de uno que se distingue como **raíz**, mantiene una única referencia a un **nodo m** que se considera **padre** de **n** en la jerarquía.
- Todos los **nodos** pueden tener **cero, uno o dos nodos** que se consideran **hijos** en la jerarquía.
- Luego, un **árbol binario** es un **árbol** donde **cada nodo** tiene **a lo sumo dos hijos** y:
  - Un **nodo hijo** es o bien **hijo izquierdo**, o bien **hijo derecho** de su **padre.**
  - El **hijo izquierdo** **precede** al **hijo derecho** en el **orden** de los hijos de un **nodo**.

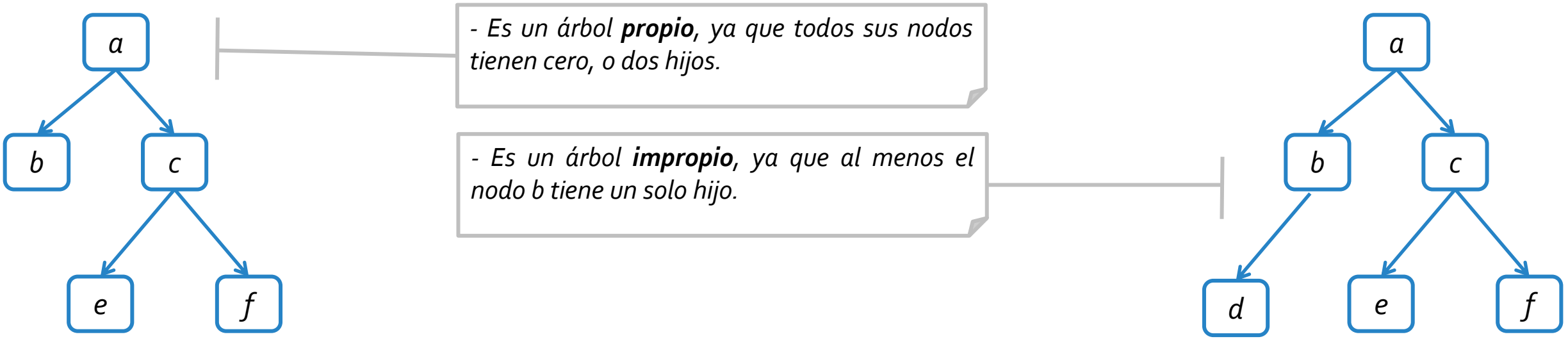
Introducción: ¿qué es un árbol binario?



- *a es el nodo raíz; único nodo sin padre en la jerarquía.*

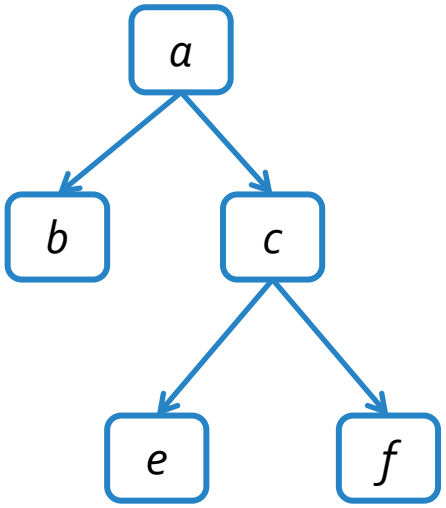
- *b y c son nodos hijos de la raíz a.*
- *b es hijo izquierdo de a, mientras c es hijo derecho de a.*
- *a es el padre de b y c en la jerarquía.*

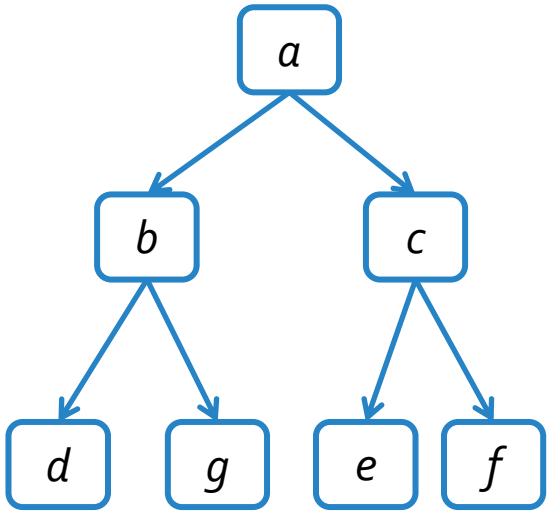
Introducción: ¿qué es un árbol binario?

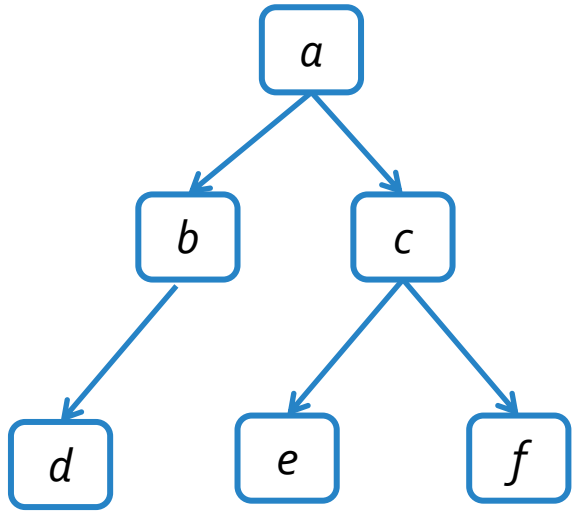


- Un **árbol binario** se dice **propio** si cada **nodo** tiene **cero o dos hijos**.
- Un **árbol binario** se dice **impropio** si **no** es un **árbol binario propio**.

Introducción: ¿qué es un árbol binario?







- Un **árbol binario** se dice **propio** si cada **nodo** tiene **cero o dos hijos**.
- Un **árbol binario** se dice **impropio** si **no** es un **árbol binario propio**.
- Un **árbol binario** se dice **lleno** si **todo nodo** (excepto las **hojas**) tiene **dos hijos**.

TDA ÁRBOL BINARIO

TDA Árbol Binario

- Se puede definir un **tipo de dato Árbol Binario** que indique qué métodos lo define.
- Se utilizará el concepto de **Position** para referenciar elementos del árbol.

```
public interface BinaryTree<E> extends Iterable<E>{
  //Operaciones de consulta y manipulación.
  public int size();
  public boolean isEmpty();
  public Iterator<E> iterator();
  public Iterable<Position<E>> positions();
  public E replace(Position<E> v, E e) throws InvalidPositionException;
  public Position<E> root() throws EmptyTreeException;
  public Position<E> parent(Position<E> v) throws InvalidPositionException, BoundaryViolationException;
  public boolean isInternal(Position<E> v) throws InvalidPositionException;
  public boolean isExternal(Position<E> v) throws InvalidPositionException;
  public boolean isRoot(Position<E> v) throws InvalidPositionException;
  ...
}
```

TDA Árbol Binario

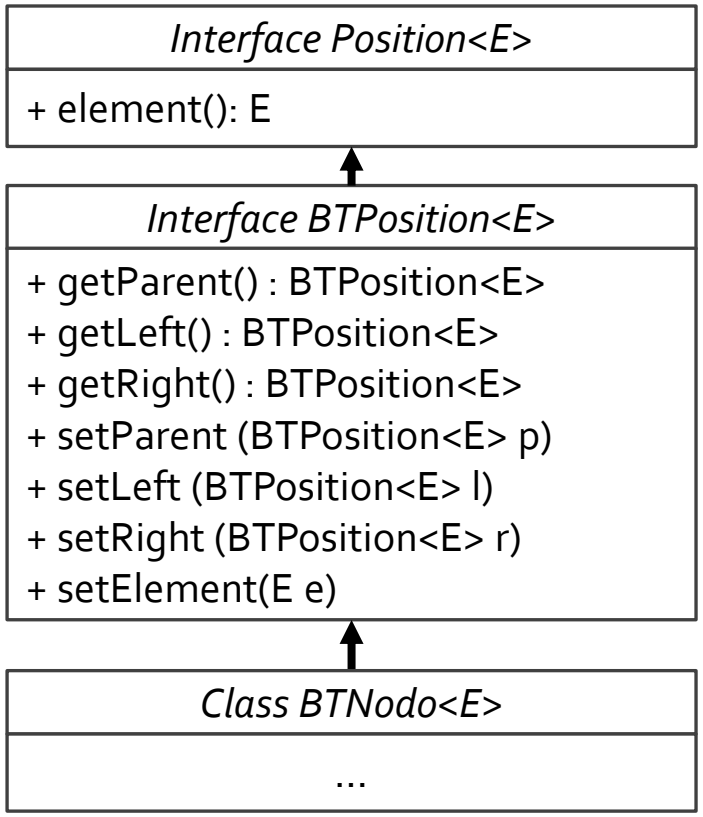
- Se puede definir un **tipo de dato Árbol Binario** que indique qué métodos lo define.
- Se utilizará el concepto de **Position** para referenciar elementos del árbol.

```
public interface BinaryTree<E> extends Iterable<E>{
 //Operaciones para creación y modificación.
  public Position<E> left(Position<E> v) throws InvalidPositionException, BoundaryViolationException;
  public Position<E> right(Position<E> v)throws InvalidPositionException, BoundaryViolationException;
  public boolean hasLeft(Position<E> v) throws InvalidPositionException;
  public boolean hasRight(Position<E> v) throws InvalidPositionException;
  public Position<E> createRoot(E r) throws InvalidOperationException;
  public Position<E> addLeft(Position<E> v, E r) throws InvalidOperationException, InvalidPositionException;
  public Position<E> addRight(Position<E> v, E r) throws InvalidOperationException, InvalidPositionException;
  public E remove(Position<E> v) throws InvalidOperationException, InvalidPositionException;
  public void attach(Position<E> r, BinaryTree<E> T1, BinaryTree<E> T2) throws InvalidPositionException;
}
```

TDA ARBOL BINARIO:: IMPLEMENTACIÓN MEDIANTE NODOS CON REF. AL PADRE e HIJOS

ED BTNodo

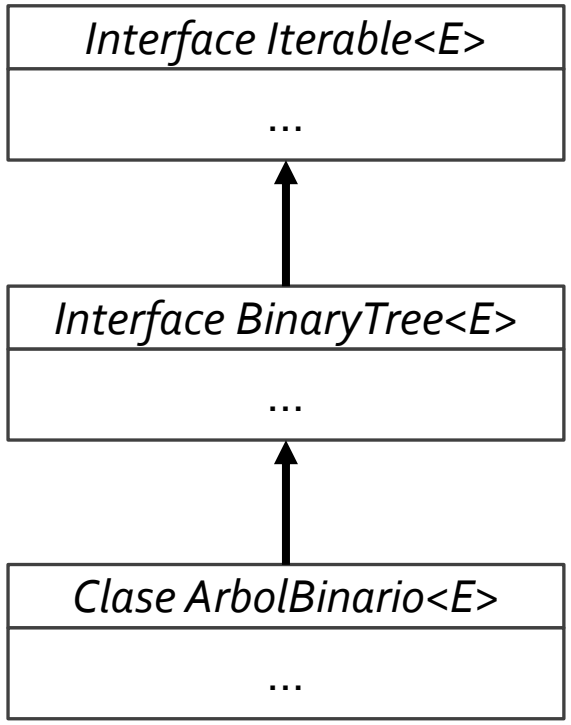
- Bajo esta implementación, se define una ED **BTNodo** que mantiene un rótulo, así como una **referencia a tres nodos** que representan los nodos **padre** e **hijo izquierdo** y **derecho**, respectivamente, del nodo modelado.




```
public class BTNodo<E> implements BTPosition<E> {
  protected E elemento;
  protected BTPosition<E> padre, hi, hd;

  public BTNodo(E el, BTPosition<E> p){
    elemento = el;
    padre = p;
  }
  public BTPosition<E> getParent(){ return padre; }
  public BTPosition<E> getLeft(){ return hi; }
  public BTPosition<E> getRight(){ return hd; }
  public E element() { return elemento; }
  public void setParent(BTPosition<E> p){ padre = p; }
  public void setLeft(BTPosition<E> l){ hi = l; }
  public void setRight(BTPosition<E> r){ hd = r; }
  public void setElement(E e){ elemento = e; }
}
```

ED Árbol Binario

- Bajo esta implementación, un **árbol binario** se define manteniendo referencia a una **BTPosition** que representa la **raíz**. A partir de este, luego se puede acceder a todos los restantes nodos.




```
public class ArbolBinario<E> implements BinaryTree<E> {
  protected BTPosition<E> raiz;
  protected int tamaño;

  public ArbolBinario(){
    tamaño = 0;
    raiz = null;
  }

  public ArbolBinario(E rot){
    tamaño = 1;
    raiz = new BTNodo<E>(rot, null);
  }
  ...
}
```

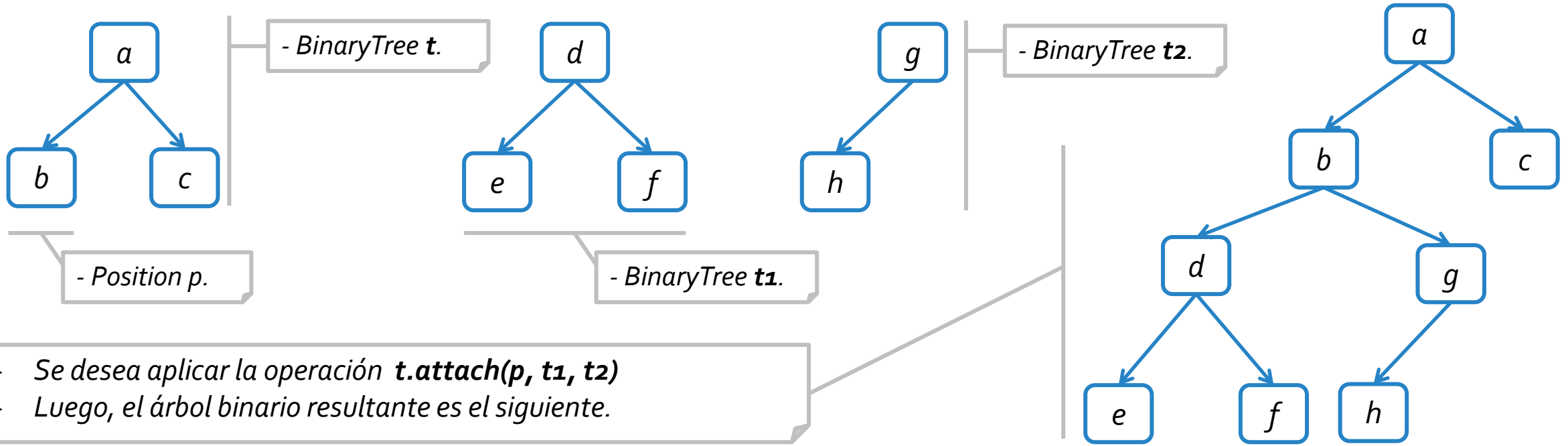
TDA ÁRBOL BINARIO :: IMPLEMENTACIÓN ATTACH

Se recomienda que todo lo documentado en las siguientes secciones sea complementado a través de otras herramientas multimedia dispuestas en la siguiente explicación online.

Implementación operación attach

- El **TDA Árbol Binario** considera **una** operación que permiten **insertar** como **subárboles** de un dado **nodo sin hijos**, a **dos árboles binarios** parametrizados.

```
public interface BinaryTree<E> extends Iterable<E>{
  //Operaciones para creación y modificación.
  public void attach(Position<E> p, BinaryTree<E> t1, BinaryTree<E> t2) throws InvalidPositionException;
}
```



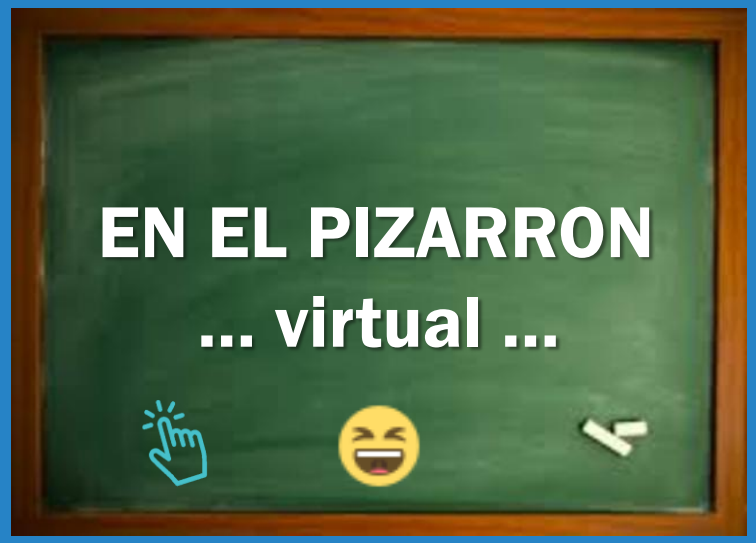
Implementación operación attach

- En ***Goodrich & Tamassia*** se considera una implementación que en la materia consideramos **incorrecta** de la operación **attach**.

```
protected void attach_mal(Position<E> p, BinaryTree<E> t1, BinaryTree<E> t2) throws InvalidPositionException {
  BTPosition<E> raiz_local = checkPosition(p);
  if (raiz_local.getLeft() != null || raiz_local.getRight() != null)
    throw new InvalidPositionException("La posicion no corresponde a un nodo hoja");

  BTPosition<E> raiz_t1 = null, raiz_t2 = null;

  try {
    if (!t1.isEmpty())
      raiz_t1 = checkPosition(t1.root());
    if (!t2.isEmpty())
      raiz_t2 = checkPosition(t2.root());

    raiz_local.setLeft(raiz_t1);
    raiz_t1.setParent(raiz_local);
    raiz_local.setRight(raiz_t2);
    raiz_t2.setParent(raiz_local);
    tamaño += t1.size() + t2.size();
  }catch(EmptyTreeException e) {}
}
```

- *Mediante el método checkPosition, se produce un **acceso a la estructura** de t1 y t2 que es **totalmente incorrecto**.*
- *No hay **ninguna forma** de asegurar que t1 y t2 están implementados en términos de **BTPositions**, por lo que puede que la operación falle.*
- *Más aún: ¿qué sucede si en t1 y t2 se **realizan cambios**? ¿Estos **afectan** al árbol local que acaba de realizar el **attach**?*
- *Por estas razones, esta implementación es considerada **inválida** ya que corrompe todas las reglas de **encapsulamiento** y utilización de TDAs que estudiamos a lo largo del cuatrimestre.*

Implementación correcta.

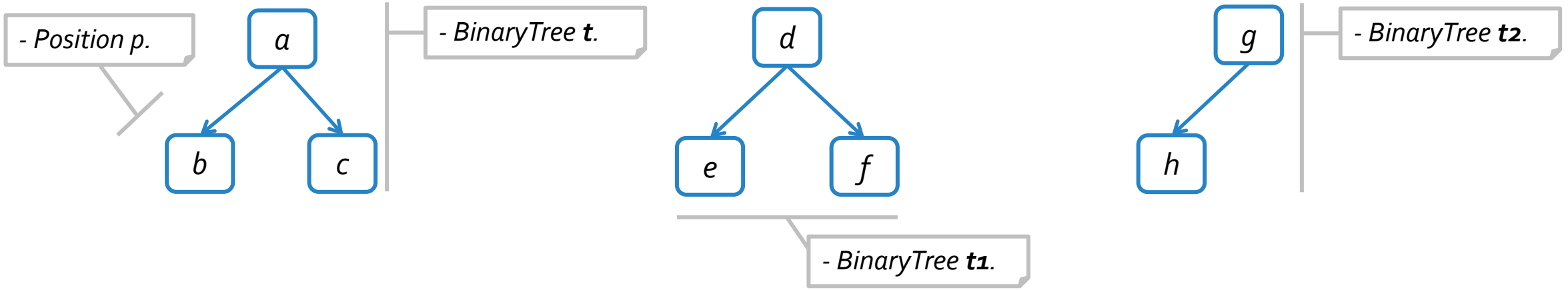


Implementación operación attach

- En ***Goodrich & Tamassia*** se considera una implementación que en la materia consideramos **incorrecta** de la operación **attach**.
- Veremos a continuación la forma **correcta** de realizar el **attach**, realizando una **clonación** de los árboles **t1** y **t2**.

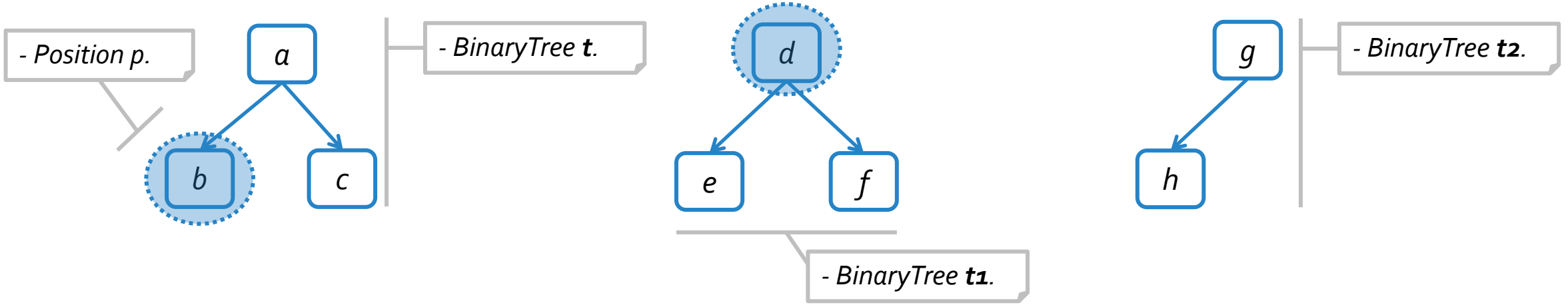
Implementación correcta operación attach

- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**



Implementación correcta operación attach

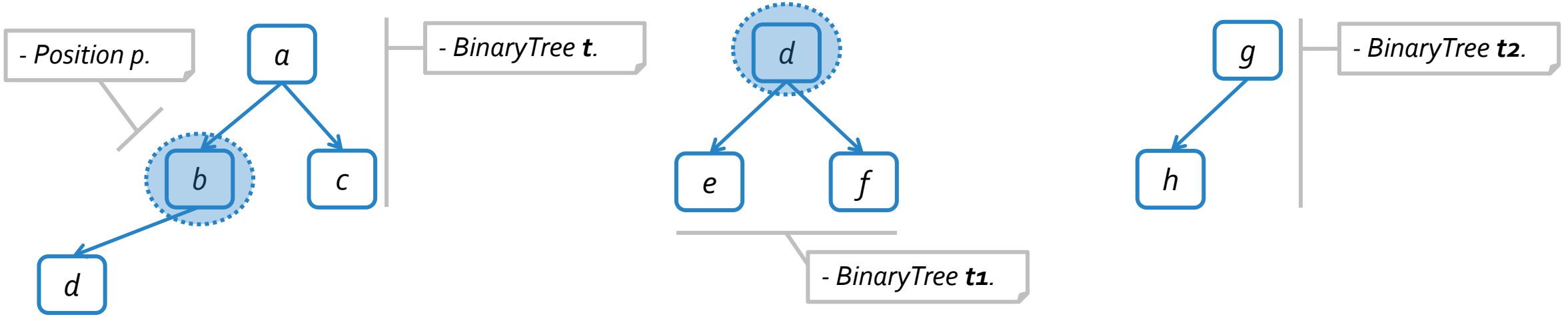
- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**



- *Si **t1** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo izquierdo** de p.*

Implementación correcta operación attach

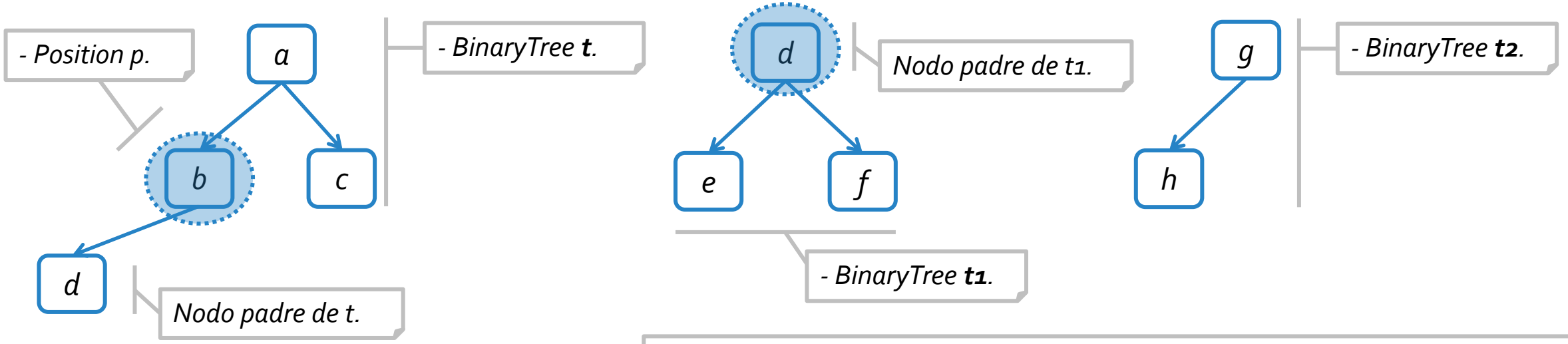
- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**



- *Si **t1** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo izquierdo** de p.*

Implementación correcta operación attach

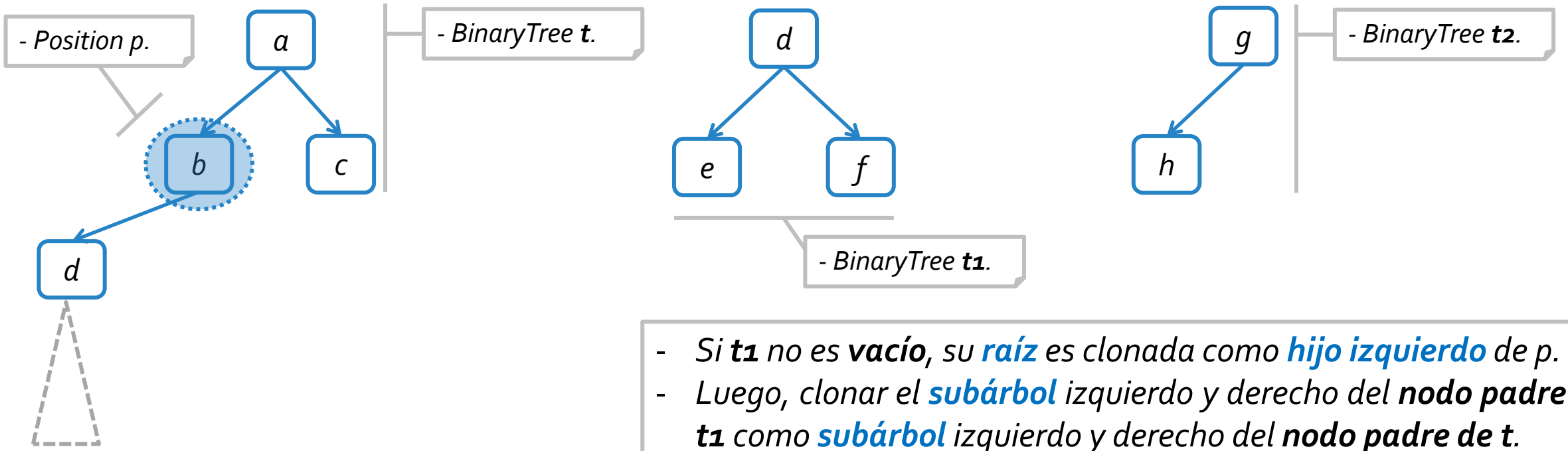
- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**



- *Si **t1** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo izquierdo** de p.*
- *Luego, clonar el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t1** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*

Implementación correcta operación attach

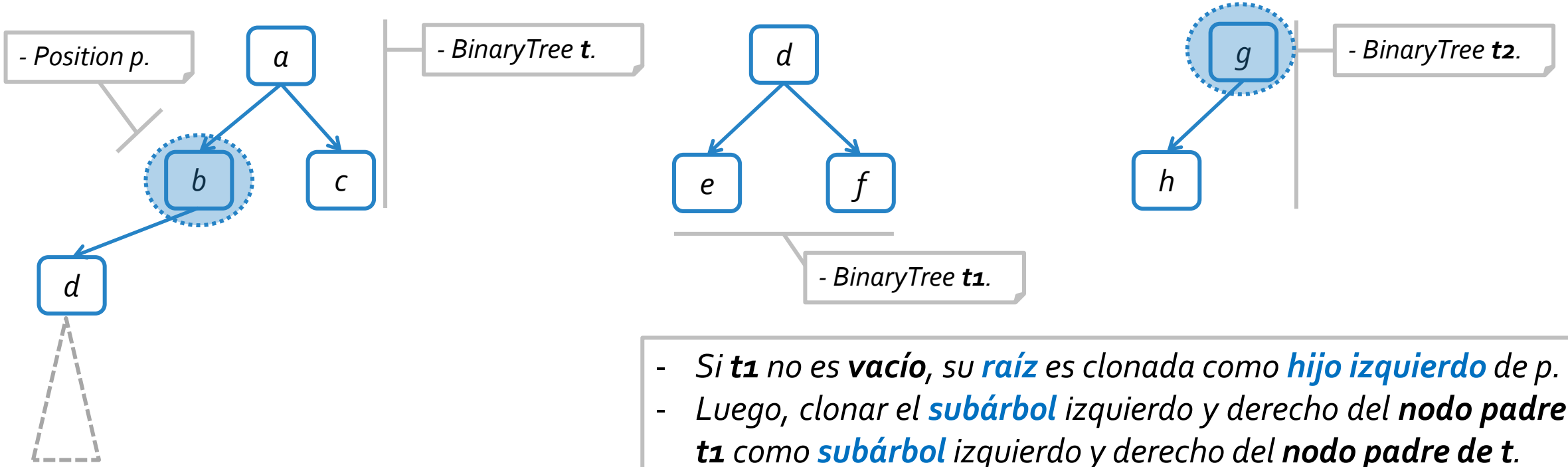
- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**



- *Si **t1** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo izquierdo** de p.*
- *Luego, clonar el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t1** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*

Implementación correcta operación attach

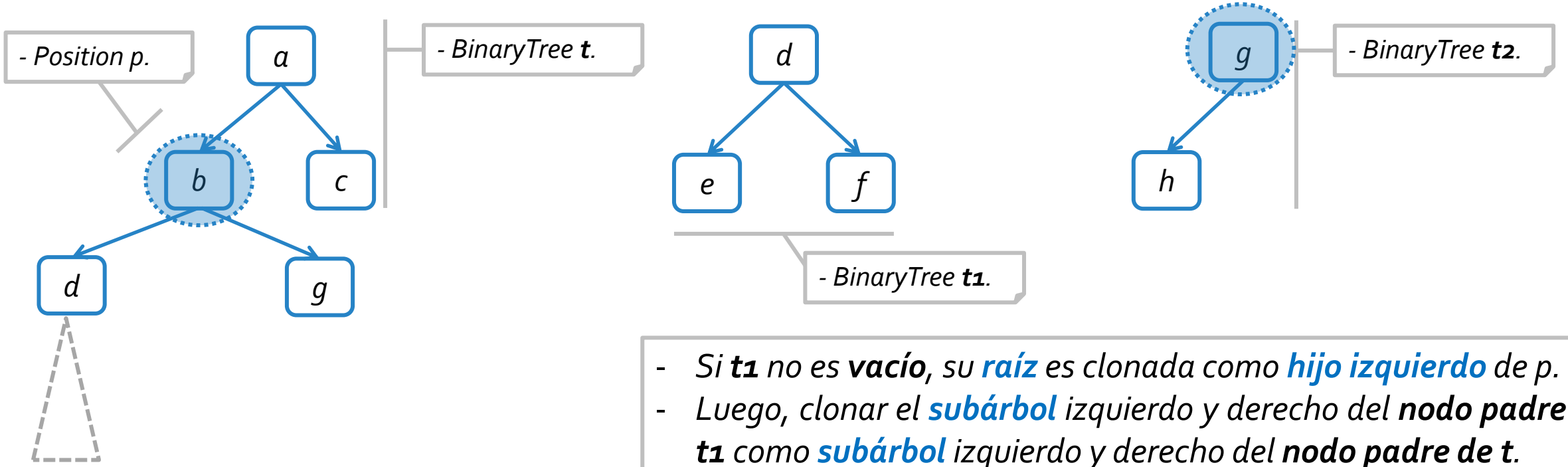
- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**



- *Si **t1** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo izquierdo** de p.*
- *Luego, clonar el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t1** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*
- *Si **t2** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo derecho** de p.*

Implementación correcta operación attach

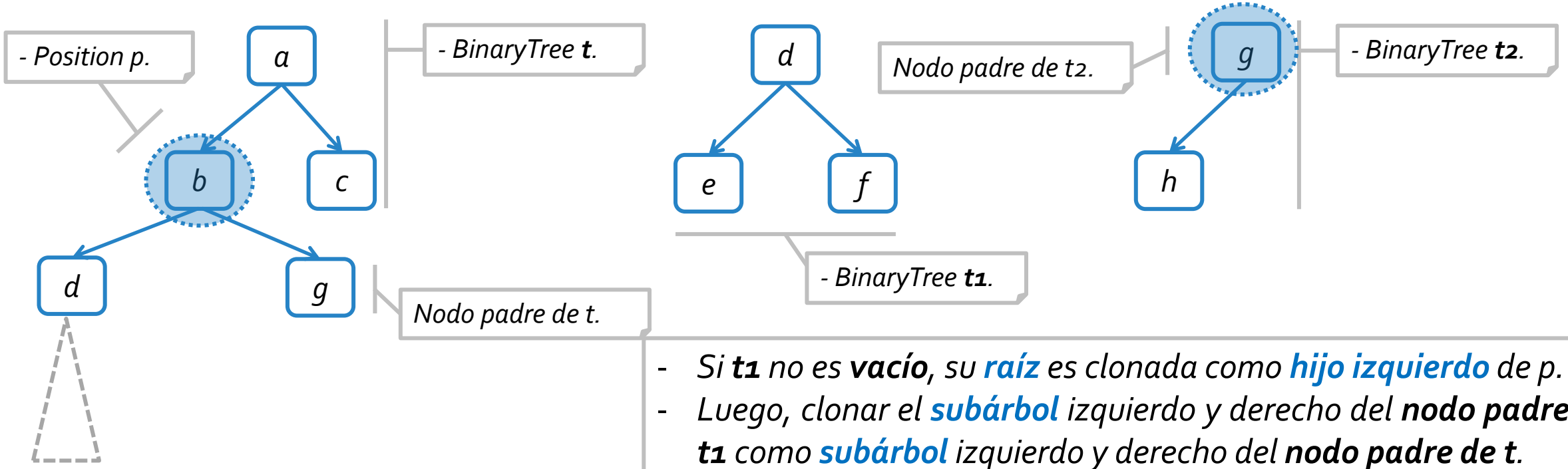
- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**



- *Si **t1** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo izquierdo** de p.*
- *Luego, clonar el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t1** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*
- *Si **t2** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo derecho** de p.*

Implementación correcta operación attach

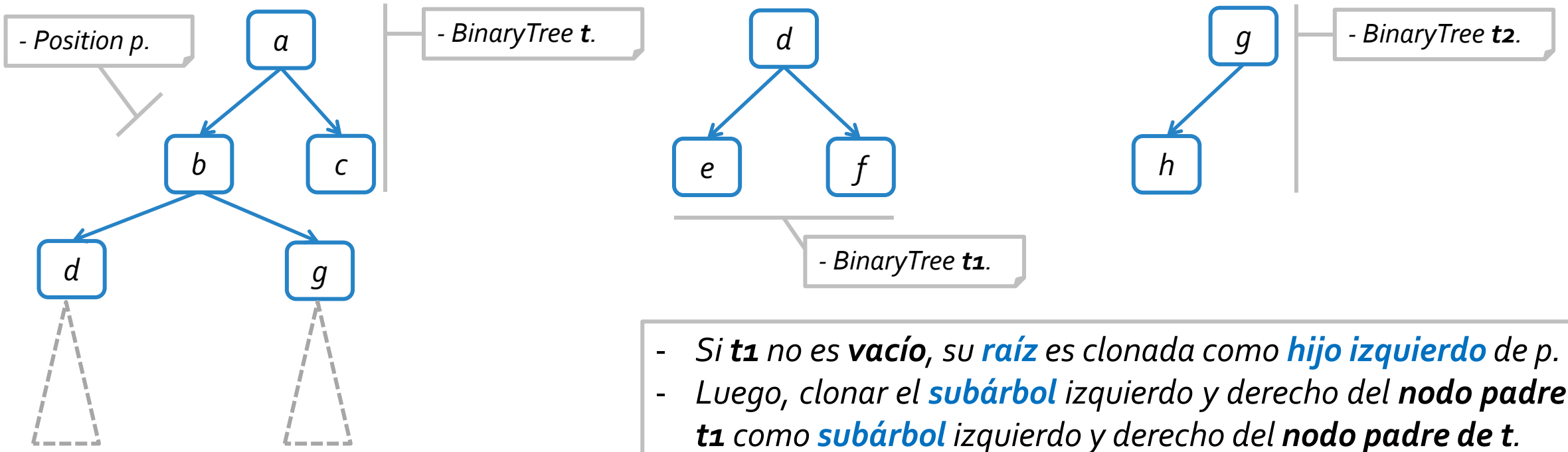
- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**



- *Si **t1** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo izquierdo** de p.*
- *Luego, clonar el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t1** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*
- *Si **t2** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo derecho** de p.*
- *Luego, clonar el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t2** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*

Implementación correcta operación attach

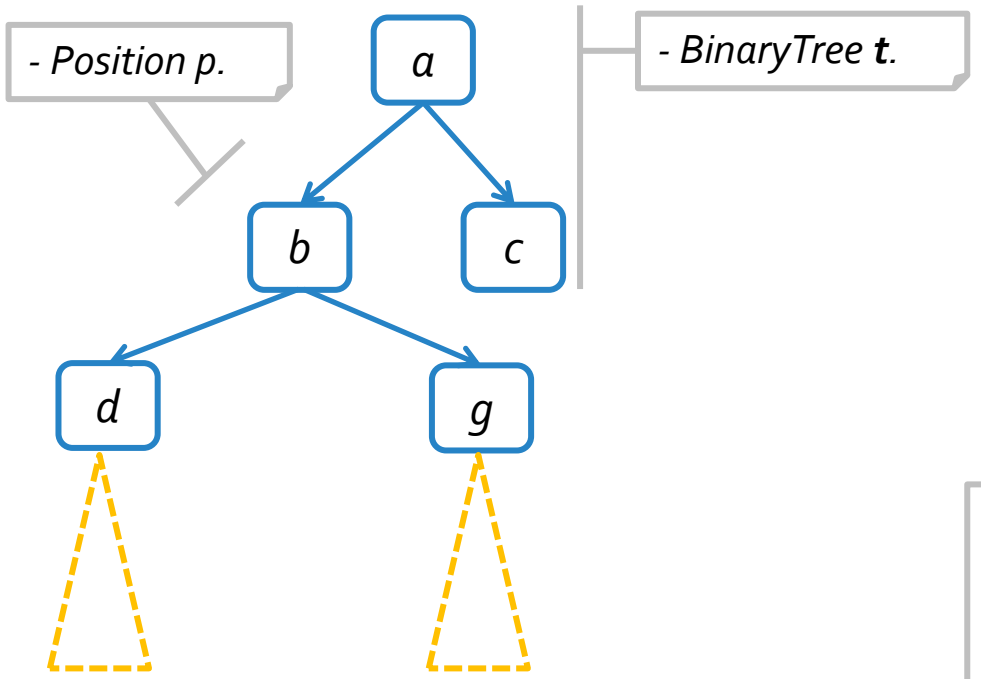
- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**

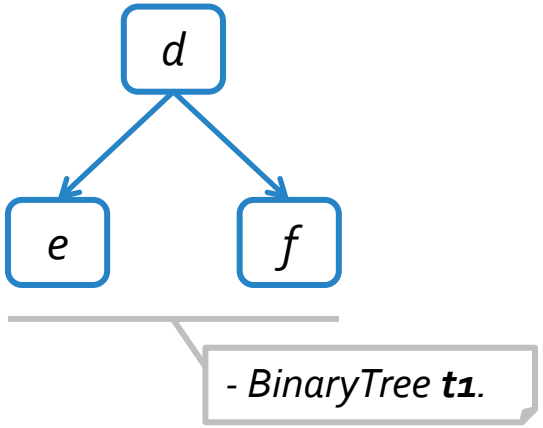


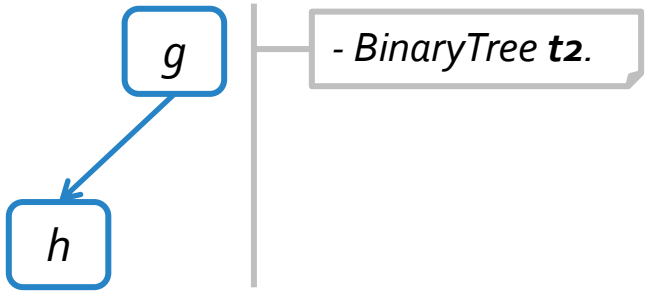
- *Si **t1** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo izquierdo** de p.*
- *Luego, clonar el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t1** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*
- *Si **t2** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo derecho** de p.*
- *Luego, clonar el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t2** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*

Implementación correcta operación attach

- Supongamos que se desea aplicar la operación **t.attach(p, t1, t2)**







Comportamiento **recursivo**

- *Si **t1** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo izquierdo** de p.*
- *Luego, **clonar** el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t1** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*
- *Si **t2** no es **vacío**, su **raíz** es clonada como **hijo derecho** de p.*
- *Luego, **clonar** el **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t2** como **subárbol** izquierdo y derecho del **nodo padre de t**.*

Implementación correcta operación attach

```
public void attach(Position<E> p, BinaryTree<E> t1, BinaryTree<E> t2) throws InvalidPositionException {
  BTPosition<E> raiz_local = checkPosition(p), hi_raiz_local, hd_raiz_local;
  Position<E> raiz_t1, raiz_t2;

  if (raiz_local.getLeft() != null || raiz_local.getRight() != null)
    throw new InvalidPositionException("La posicion no corresponde a un nodo hoja");
  try {
    //Clonación de T1 como subárbol izquierdo
    if (!t1.isEmpty()) {
      raiz_t1 = t1.root();
      hi_raiz_local = new BTNodo<E>(raiz_t1.element(), raiz_local);
      raiz_local.setLeft(hi_raiz_local);
      clonar(hi_raiz_local, raiz_t1, t1);
    }

    //Clonación de T2 como subárbol derecho
    if (!t2.isEmpty()) {
      raiz_t2 = t2.root();
      hd_raiz_local = new BTNodo<E>(raiz_t2.element(), raiz_local);
      raiz_local.setRight(hd_raiz_local);
      clonar(hd_raiz_local, raiz_t2, t2);
    }
    tamaño += T1.size() + t2.size();
  }catch(EmptyTreeException e) { raiz_local.setLeft(null); raiz_local.setRight(null); }
}
```

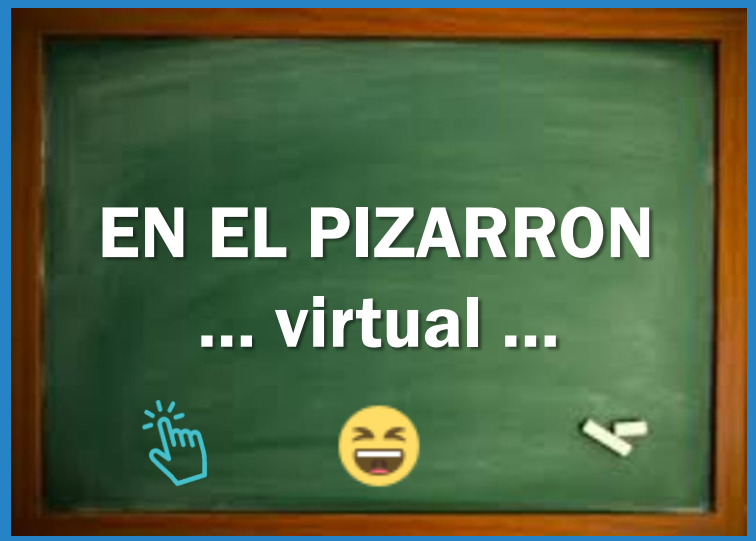
Implementación correcta operación attach

```
protected void clonar(BTPosition<E> padre_local, Position<E> padre_t, BinaryTree<E> t) {
  BTPosition<E> hi_padre_local, hd_padre_local;
  Position<E> hi_padre_t, hd_padre_t;
  try {
    //Si existe hijo izquierdo en T de padre_t, se clona este y el subárbol a partir del hijo izquierdo de padre_t.
    if (t.hasLeft(padre_t)) {
      hi_padre_t = t.left(padre_t);
      hi_padre_local = new BTNodo<E>(hi_padre_t.element(), padre_local);
      padre_local.setLeft(hi_padre_local);
      clonar(hi_padre_local, hi_padre_t, t);
    }

    //Si existe hijo derecho en T de padre_t, se clona este y el subárbol a partir del hijo derecho de padre_t.
    if (t.hasRight(padre_t)) {
      hd_padre_t = t.right(padre_t);
      hd_padre_local = new BTNodo<E>(hd_padre_t.element(), padre_local);
      padre_local.setRight(hd_padre_local);
      clonar(hd_padre_local, hd_padre_t, t);
    }
  }catch(InvalidPositionException | BoundaryViolationException e) {
    padre_local.setLeft(null); padre_local.setRight(null);
  }
}
```

TDA ÁRBOL BINARIO :: CLONANDO UN ÁRBOL PERFECTO

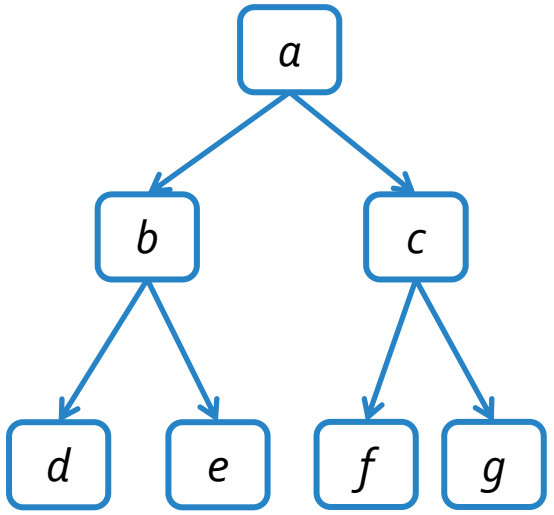
Se recomienda que todo lo documentado en las siguientes secciones sea complementado a través de otras herramientas multimedia dispuestas en la siguiente explicación online.

Problema propuesto.



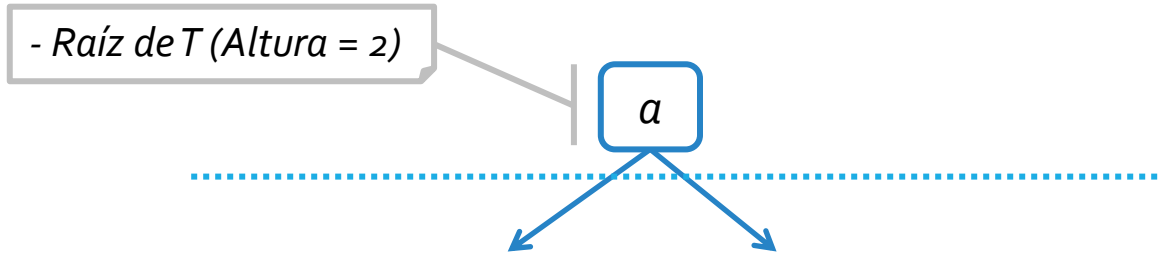
Clonación de árboles binarios

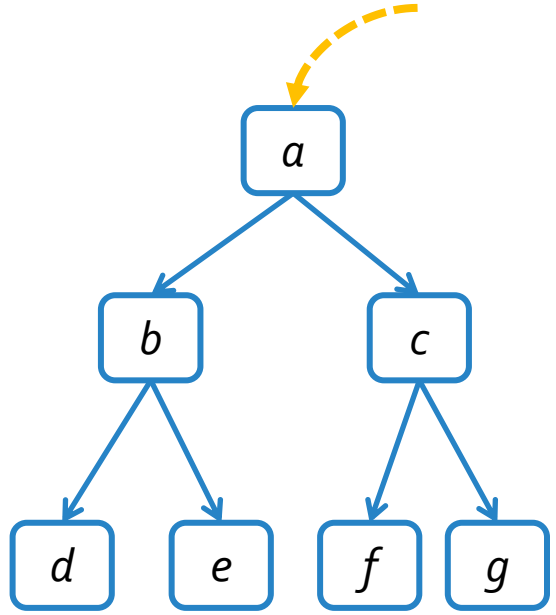
- Desarrolle un método que, recibiendo la **altura A** y un **iterador** de elementos correspondiente a un **árbol binario perfecto T**, **retorne un nuevo árbol binario** cuyos elementos deben ser la **clonación de T**. Considere que el **iterador** de elementos recibidos realiza un **recorrido en preorden en T**.
  - **Árbol binario T.**
  - **Altura (T) = 2**
  - **Iterador en pre-orden: < a, b, d, e, c, f, g >.**



Clonando árbol perfecto a partir de iterador

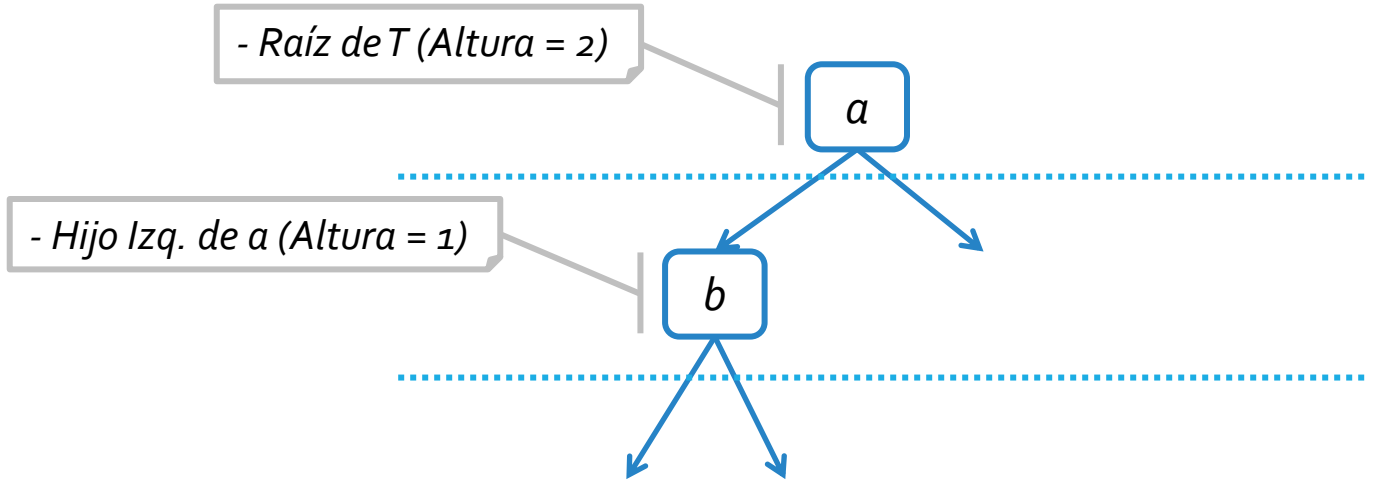
- Considerando un **árbol binario perfecto T**, de altura **A = 2**, y cuyo recorrido en **preorden** resulta en el siguiente orden de sus elementos **< *a, b, d, e, c, f, g* >**, veamos que:

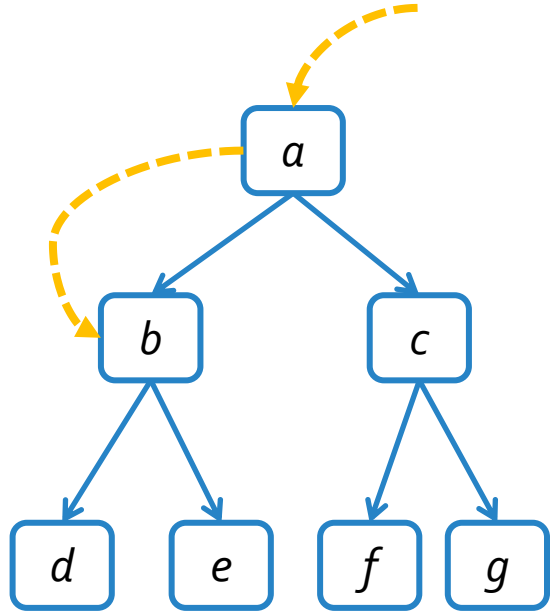




Clonando árbol perfecto a partir de iterador

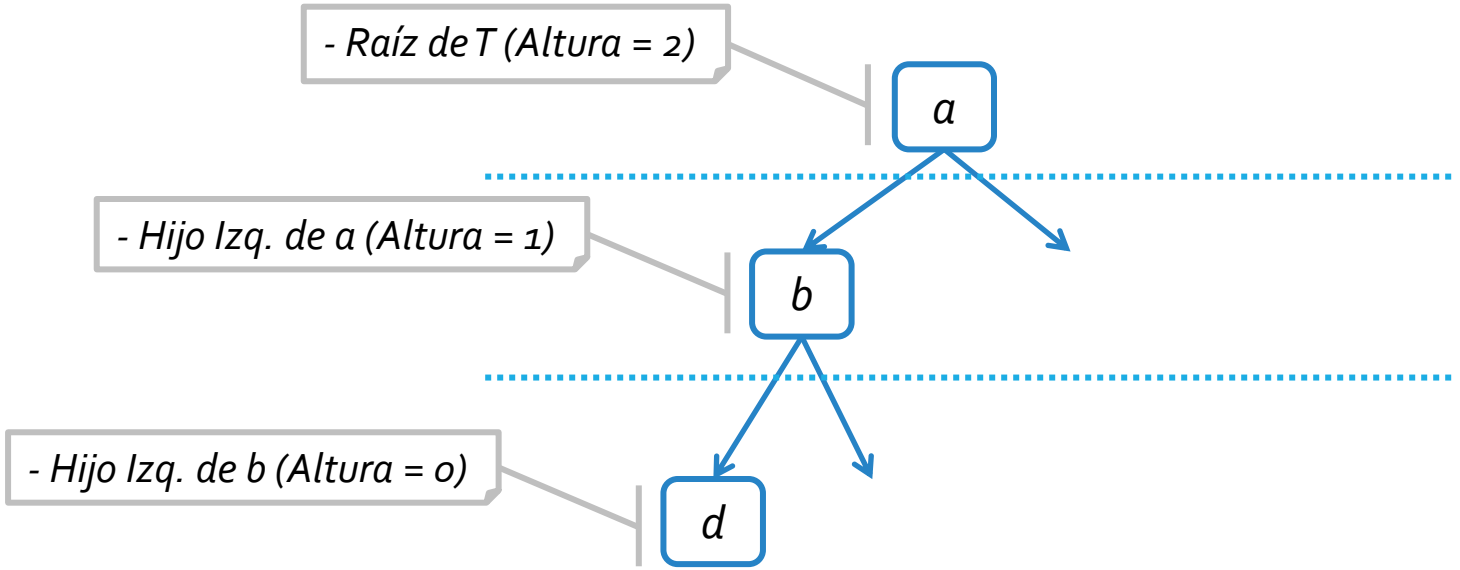
- Considerando un **árbol binario perfecto T**, de altura **A = 2**, y cuyo recorrido en **preorden** resulta en el siguiente orden de sus elementos **< *a, b, d, e, c, f, g* >**, veamos que:

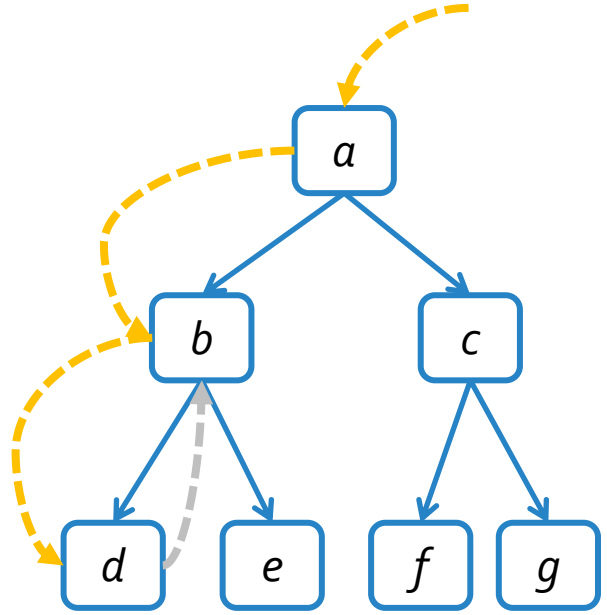




Clonando árbol perfecto a partir de iterador

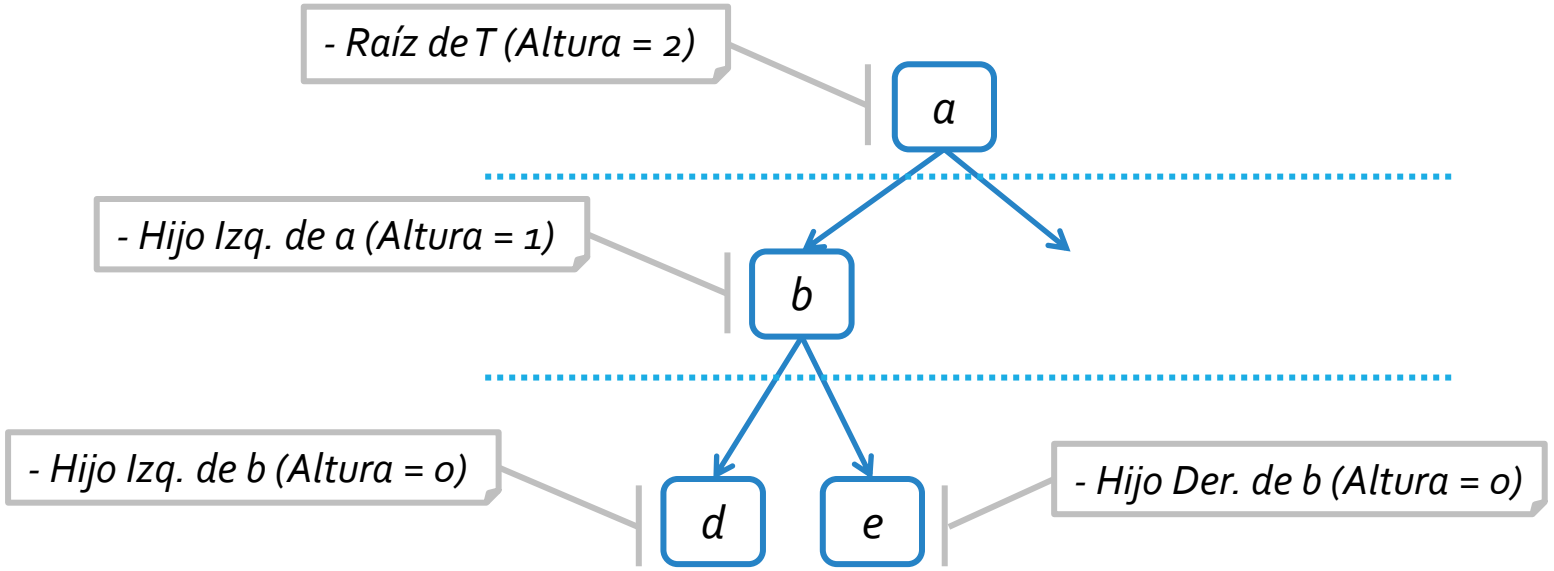
- Considerando un **árbol binario perfecto T**, de altura **A = 2**, y cuyo recorrido en **preorden** resulta en el siguiente orden de sus elementos **< *a, b, d, e, c, f, g* >**, veamos que:

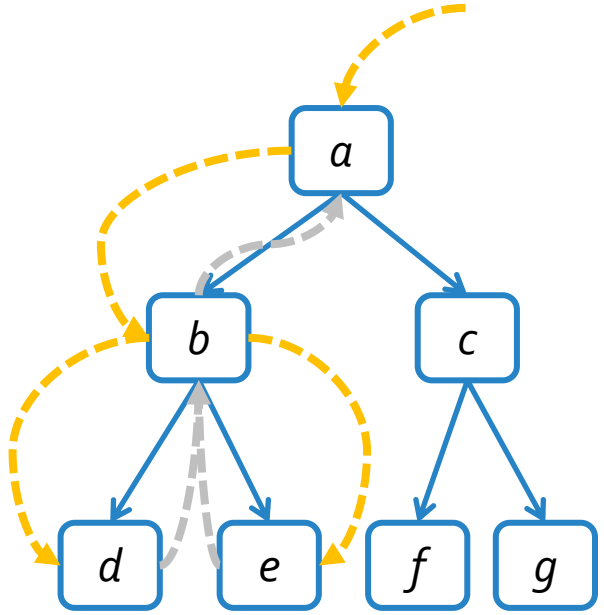




Clonando árbol perfecto a partir de iterador

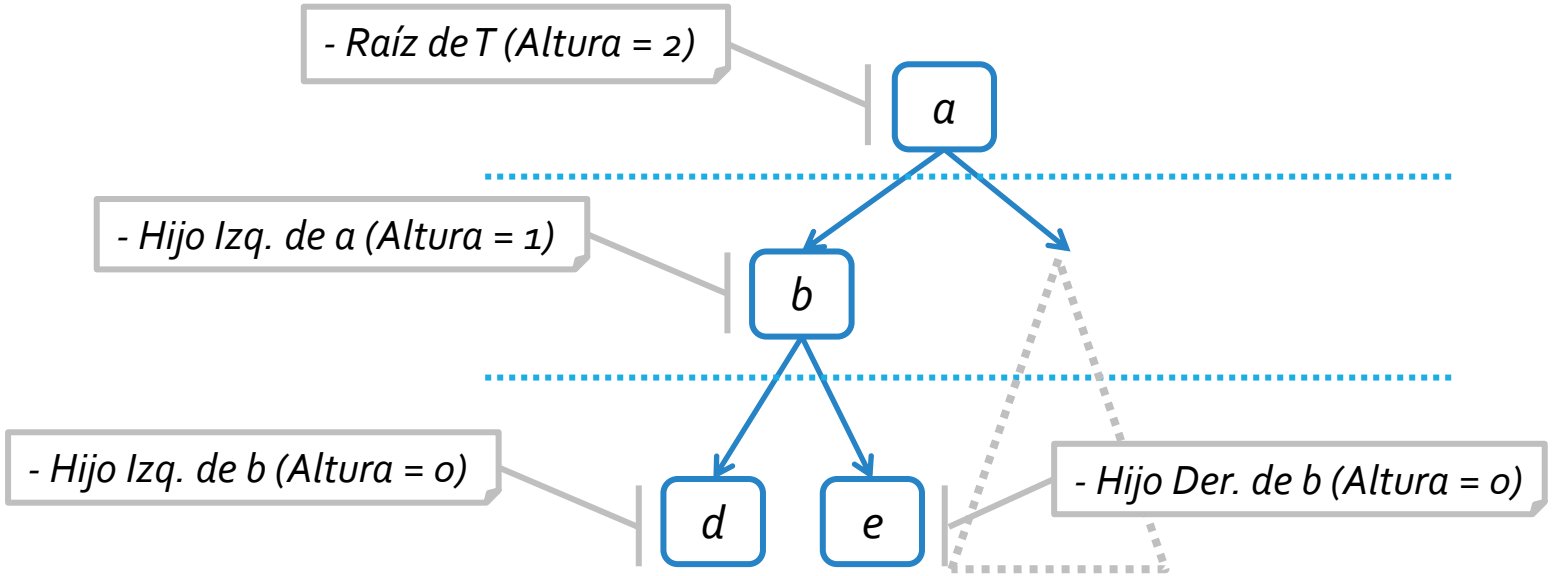
- Considerando un **árbol binario perfecto T**, de altura **A = 2**, y cuyo recorrido en **preorden** resulta en el siguiente orden de sus elementos **< *a, b, d, e, c, f, g* >**, veamos que:

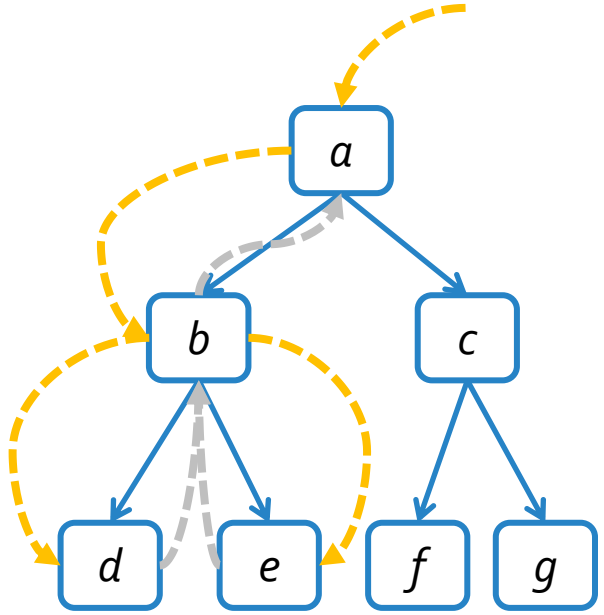




Clonando árbol perfecto a partir de iterador

- Considerando un **árbol binario perfecto T**, de altura **A = 2**, y cuyo recorrido en **preorden** resulta en el siguiente orden de sus elementos **< *a, b, d, e, c, f, g* >**, veamos que:





Clonando árbol perfecto a partir de iterador

```
public static <E> BinaryTree<E> crear_arbol_perfecto(Iterator<E> it, int altura) {
  BinaryTree<E> toReturn = new ArbolBinario<E>();
  E rotulo;
  try {
    if (it.hasNext()) {
      rotulo = it.next();
      toReturn.createRoot(rotulo);
      if (altura>0)
        clonar_arbol_perfecto (toReturn, toReturn.root(), it, altura-1);
    }
  }catch(InvalidOperationException | EmptyTreeException e) {}
  return toReturn;
}

//Sigue en la siguiente slide
```

Clonando árbol perfecto a partir de iterador

```
protected static <E> void clonar_arbol_perfecto(BinaryTree<E> arbol, Position<E> padre, Iterator<E> it, int altura) {
  E rotulo;
  Position<E> nuevoPadre;
  try {
    //Clonación de las hojas de árbol.
    if (altura == 0) {
      rotulo = it.next();
      arbol.addLeft(padre, rotulo);
      rotulo = it.next();
      arbol.addRight(padre, rotulo);
    }else{
      //Clonación de nodos internos del árbol.
      rotulo = it.next();
      nuevoPadre = arbol.addLeft(padre, rotulo);
      clonar_arbol_perfecto(arbol, nuevoPadre, it, altura-1);
      rotulo = it.next();
      nuevoPadre = arbol.addRight(padre, rotulo);
      clonar_arbol_perfecto(arbol, nuevoPadre, it, altura-1);
    }
  }catch(InvalidOperationException | InvalidPositionException e){}
}
```

Fin de la presentación.