# Estructuras de Datos
# Clase 21 – Ordenamiento


Dr. Sergio A. Gómez
http://cs.uns.edu.ar/~sag

Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, Argentina

# Definición del problema

Dado un arreglo *a* de *n* componentes enteras *a*[0], *a*[1], …, *a*[*n*-1] se desea obtener una permutación de *a* tal que *a*[0] ≤ *a*[1] ≤ … ≤ *a*[n-2] ≤ *a*[n-1].

# Resumen de métodos de ordenamiento

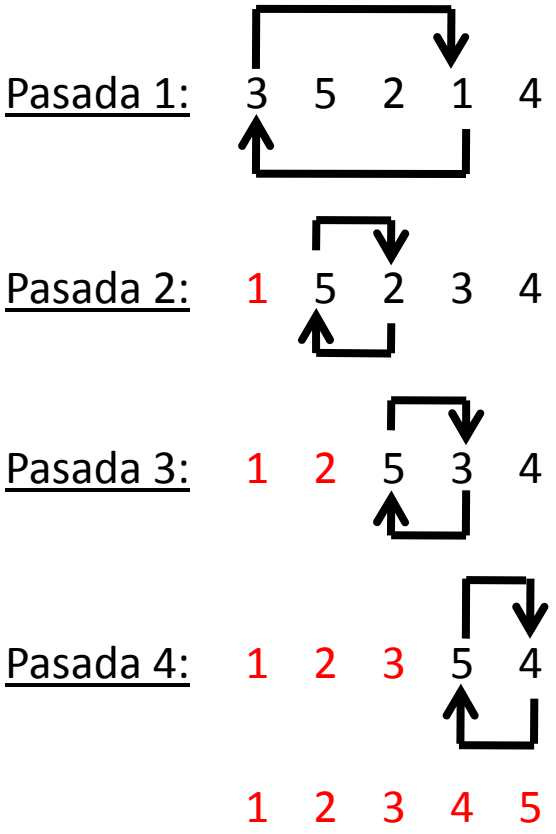
- Multipasada: $O(n^2)$
  - Selección (selection sort)
  - Burbuja (bubble sort) o intercambio (exchange sort)
  - Inserción (insertion sort)
- Merge sort: $O(n*\log_2(n))$
- Heap sort: $O(n*\log_2(n))$
- Quick sort: $O(n^2)$ en peor caso pero se espera $O(n*\log_2(n))$ en promedio

# Ordenamiento por selección

- Algoritmo:

  Haremos n-1 pasadas sobre el arreglo a

  En la pasada i-ésima, encontramos el i-ésimo menor elemento del arreglo y lo intercambiamos con a[i]



```
public static void selectionsort( int [] a, int n ) {
        for( int i=0; i<n-1; i++ ) {
                // Hallar el mínimo a[p] de a[i], …, a[n-1]
                p = i;
                for( int j=i+1; j<n; j++ )
                        if( a[j] < a[p] ) p = j;

                // Intercambiar a[i] y a[p]
                int item = a[p];
                a[p] = a[i];
                a[i] = item;

                // Ahora a[0] <= … <= a[i] y
                // a[i] <= a[j] cuando i < j < n
        }
}
```

$T_{selectionsort}( n ) = O(n^2)$

# Ordenamiento por intercambio (burbuja)

- En cada pasada el burbuja mira dos elementos adyacentes y los intercambia si están fuera de orden.
- En cada pasada, el mayor elemento del arreglo queda al final del subarreglo que se está ordenando
- Son necesarias n-1 pasadas (ya que el primer elemento queda ordenado gratis)

```
public static void bubblesort( int [] a, int n ) {
        for( int i=n-1; i>=0; i-- ) {
                // Burbujear el item más grande en a[0], …, a[i] a a[i]
                for( int j=0; j<i; j++ )
                        if( a[j] > a[j+1] ) {
                                // Intercambiar items
                                int item = a[j];
                                a[j] = a[j+1];
                                a[j+1] = item;
                        }

                // Ahora a[i] <= … <= a[n] y
                // a[j] <= a[i] cuando 0 <= j < i-1
        }
}
```

$T_{bubblesort}( n ) = O(n^2)$

<u>Optimización:</u> Cuando nunca se entra al if en una iteración de i significa que el arreglo está ordenado.
La optimización consiste en ubicar una bandera en el if y setearla en true al entrar.
Si al terminar la iteración, esta bandera está en falso entonces el arreglo está ordenado y se puede terminar.

# Ordenamiento por inserción

- Es equivalente a la forma de ordenar un mazo de cartas.
- Se comienza con un mazo vacío y uno desordenado.
- Cada carta se trata de insertar en la posición correcta.
- Entonces, en un momento dado, una parte del mazo está ordenada y se trata de insertar la siguiente carta de la porción desordenada del mazo en la posición correcta.
- Terminamos cuando la porción desordenada está vacía.

```
public static void insertionsort( int [] a, int n ) {
        for( int i = 1; i<n; i++ ) {
                // Insertar a[i] en la secuencia ordenada a[0], …, a[i-1]
                int item = a[i];     // item a insertar
                int j = i;           // puntero de inserción
                boolean found = false;
                while( j>0 && !found )
                        if( a[j-1] <= item )     // El item debería ser a[j]
                                found = true;
                        else {
                                a[j] = a[j-1];  // Mover a[j-1] para arriba
                                j--;
                        }
                        a[j] = item;          // Insertar item
                        // ahora a[0] <= … <= a[i-1]
        }
}
```

$T_{insertionsort}(n) = O(n^2)$

# Merge sort: Ordenamiento por mezcla

- Caso recursivo: Partir el arreglo en dos, ordenar recursivamente cada mitad y luego hacer la mezcla de cada mitad ordenada en un gran arreglo ordenado.
- Caso base: El arreglo tiene 0 o 1 componentes entonces está ordenado.

# Merge sort

```
public static void mergesort( int [] a, int n)
{  msort( a, 0, n-1); }

private static void msort( int [] a, int ini, int fin)
{
    if( ini < fin) {
            int medio = (ini + fin) / 2;
            msort(a, ini, medio );
            msort(a, medio + 1,fin);
            merge( a, ini, medio, fin );
            // merge hace la mezcla de los sub-arreglos en O(n)
    }
}
```

Tamaño de la entrada: n = cantidad de componentes de a

Recurrencia para n:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & si \quad n = 1 \\ c_2 n + 2T(n/2) & si \quad n > 1 \end{cases}$$

$T(n) = c_2n + 2T(n/2) = c_2n + 2(c_2(n/2) + 2T(n/2/2))$

$= 2c_2n + 4T(n/4) = 2c_2n + 4(c_2(n/4) + 2T(n/4/2))$

$= 3c_2n + 8T(n/8) = \ldots$

$= ic_2n + 2^iT(n/2^i)$

Termina cuando $n/2^i = 1$, es decir $n=2^i$.

Luego, $i = \log_2(n)$.

$T(n) = \log_2(n)c_2n + nT(1) = \log_2(n)c_2n + nc_1$ es $O(n\log_2(n))$

# Quick sort

El quick sort trabaja como merge sort pero evita hacer la mezcla

Algoritmo quick sort:

si la lista es no vacía entonces

1) dividir la lista en dos de tal manera que los ítems en la primera mitad vengan antes que los items en la segunda mitad

2) ordenar con quick sort la primera mitad

3) ordenar con quick sort la segunda mitad

Pregunta: ¿Cómo realizar la división en forma eficiente?

Supongamos nos dan una lista de 6 números.

17 36 22 41 12 24

Pongamos 24 en su lugar reacomodando la lista de tal manera que los primeros items sean menores a 24 y el resto mayores.

Guardemos 24 en un lugar seguro (una variable auxiliar) y definamos dos cursores *left* y *right* que indiquen dónde estamos:

17 36 22 41 12 **

*left* *right*

Ahora movamos *left* hacia la derecha hasta descubrir un ítem mayor a 24:

17 36 22 41 12 **

*left* *right*

Movamos este ítem al "agujero" donde estaba el 24 originalmente:

17 ** 22 41 12 36

*left* *right*

Movamos *right* a la izquierda hasta encontrar un ítem menor a 24:

17 ** 22 41 12 36

*left* *right*

Movamos este item al agujero arriba de left:

17 12 22 41 ** 36

*left* *right*

Hemos progresado, *left* y *right* están más cerca, movamos *left* a la derecha hasta hallar elemento mayor a 24:

17 12 22 41 ** 36

*left* *right*

Hemos progresado, *left* y *right* están más cerca, movamos *left* a la derecha hasta hallar elemento mayor a 24:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 12 | 22 | 41 | ** | 36 |
| | | | *left* | *right* | |

Pongamos este item en la posición *left* sobre el marcador que indica *right*:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 12 | 22 | ** | 41 | 36 |
| | | | *left* | *right* | |

Movamos *right* a la izquierda, cuando los marcadores se encuentran en el agujero, pongamos allí al 24:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 12 | 22 | 24 | 41 | 36 |
| | | | *left* | | |
| | | | *right* | | |

Ahora podemos ordenar los items a la izquierda de 24 y los items a la derecha de 24 en forma recursiva usando este mismo proceso.
La componente donde está el 24 se llama “pivot” (o pivote en castellano).

<u>Análisis de la Complejidad:</u>
Quick sort en promedio corta el arreglo por la mitad, como no hace el merge, en promedio es más eficiente que merge sort con una complejidad de $O(n\log_2(n))$.
Sin embargo, el peor caso se da cuando se quiere ordenar un arreglo ordenado, se invoca recursivamente con una parte que mide 1 y la otra n-1, dando una complejidad de $O(n^2)$.

# Heap Sort

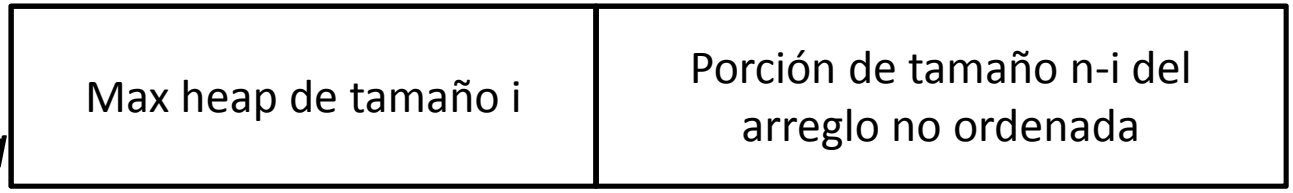
- Objetivo: Ordenar un arreglo A de N enteros en forma ascendente
- Algoritmo HeapSort( a, n )

```
cola ← new ColaConPrioridad()
para i ← 0..n-1 hacer
    cola.insert( a[i] )
para i ← 0..n-1 hacer
        a[i] ← cola.removeMin()
```

- Complejidad: $T_{heapsort}(n) = O(n\log_2(n))$

# Heap sort in place

- En lugar de usar una cola con prioridades externa al arreglo *a*, se puede usar una porción del mismo arreglo *a* para implementar la cola con prioridades.
- *a*




- Paso 1: para i=0 hasta n-1 insertar *a*[i] en la heap
- Paso 2: para i=n-1 hasta 0 eliminar el máximo elemento de la heap y ubicarlo en a[i].
- Complejidad: $T_{heapsortinplace}(n) = O(n\log_2(n))$