

Estructuras de Datos
Clase 17 – Grafos (Tercera Parte)



Dr. Sergio A. Gómez
<http://cs.uns.edu.ar/~sag>



Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, Argentina

Algoritmos para encontrar caminos en digrafos pesados con números reales

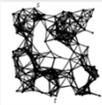
- **DFS pinchado (st-path search):** Permite encontrar un camino entre dos vértices s y t
- BFS para hallar camino con cantidad mínima de arcos.
- **DFS con backtracking, marca y desmarca:** Permite encontrar un camino de costo mínimo entre dos vértices s y t
- **Dijkstra:** Permite hallar todos caminos de costo mínimo entre un vértice a y todos los otros vértices
- **Floyd:** Permite hallar el camino de costo mínimo entre cada par de vértices s y t .

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 2

DFS pinchado (s-t path search)

Permite hallar un camino en el digrafo G entre Origen y Destino y retorna el camino hallado en Camino (el cual es una lista vacía al principio).
Si encontró un camino, retorna verdadero, en caso contrario retorna falso.

Algoritmo HallarCamino(G , origen, destino, camino) : boolean
 origen.put(Estado, Visitado)
 camino.addLast(origen)
 Si origen = destino **entonces**
 retornar verdadero
Sino
 para cada adyacente v de origen en G **hacer**
 si $v.get(Estado) = NoVisitado$ **entonces**
 encuentre \leftarrow HallarCamino(G , v , destino, camino)
 si encuentre **entonces retornar** verdadero
 { Cuando no encuentre, hago backtracking: Borro origen del camino. }
 Camino.remove(camino.last())
retornar falso



Complejidad:
 $T(n,m) = O(n+m)$

Ejercicio: Codificar en Java

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 3

Estrategia para hallar ciclos

{ Encuentra un ciclo que contenga a v , buscando caminos desde los adyacentes de v (que se llaman w) hacia v . Ciclo es una lista inicialmente vacía }

Algoritmo HallarCiclo(G , v , ciclo)
 encuentre \leftarrow falso
 mientras hay adyacentes para considerar y no encuentre hacer
 $w \leftarrow$ siguiente adyacente de v en G
 encuentre \leftarrow HallarCamino(G , w , v , camino)
 finmientras
 si encuentre **entonces**
 ciclo.addLast(v)
 para cada vertice x de camino hacer
 ciclo.addLast(x)
 finpara
 fin $T_{hallarciclo}(n,m) = O(\text{grado}(v) * (n+m) + n)$

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 4

DFS con marca y desmarca

Dado un digrafo pesado con números reales, permite hallar un camino de costo mínimo entre dos vértices origen y destino computando el camino y su costo (entendido como la suma de los pesos de los arcos).

El tiempo de ejecución para un grafo que tiene todos los arcos entre cada par de nodos es $O(n!)$ (en la práctica esto es mucho menos, porque $n!$ se da en el peor caso que es cuando todos los vértices están conectados con todos los otros vértices)

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 5

Al comienzo, $camino_actual$ es una lista vacía y $costo_camino_actual$ es 0.
El costo del camino es la suma de los pesos de los arcos del camino.

Algoritmo HallarCaminoMinimo(G , origen, destino, camino_actual, costo_camino_actual, camino_minimo, costo_camino_minimo)
 origen.put(Estado, Visitado)
 Camino_actual.addLast(origen)
Si origen = destino **entonces**
 Si costo_camino_actual < costo_camino_minimo **entonces**
 camino_minimo \leftarrow camino_actual
 costo_camino_minimo \leftarrow costo_camino_actual
Sino
 para cada adyacente v de origen en G **hacer**
 si $v.get(Estado) = NoVisitado$ **entonces**
 HallarCaminoMinimo(G , v , destino, camino_actual, costo_camino_actual + peso(origen,v), camino_minimo, costo_camino_minimo)
 camino_actual.remove(camino_actual.last()) { backtracking }
 origen.put(Estado, NoVisitado)

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 6

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Mantenimiento del costo mínimo

Java tiene pasaje de parámetros por valor.

Por lo tanto, programar código erróneo como:

```
void buscar_camino( ... float costo_actual, Float costo_minimo, .... ) {
    if( costo_actual < costo_minimo ) {
        ....
        costo_minimo = costo_actual;
        ....
    }
}
```

No funciona incluso usando Float (clase wrapper de float).

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

7

Forma correcta del mantenimiento del costo mínimo

Por lo tanto se recomienda usar una clase:

```
class Solucion {
    float costo;
    ... setters y getters para el costo...
}
```

O mejor aún:

```
class Solucion<A> {
    A estado;
    ... setters y getters para el estado ...
}
```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

8

BFS para hallar caminos

```
// Retorna true si hay camino de s a t en G.
// Previo es un mapeo tal que previo.get(v) retorna el nodo previo de v
// en el camino de s a v.
BFSSearch( G : Graph<V,E>, s : Vertex<V>, t : Vertex<V>;
    previo : Map<Vertex<V>, Vertex<V>> ) : boolean
encolar s en Q; marcar s
while Q no está vacía Do
    desencolar x de Q
    if x = t then return true
    for cada adyacente v de x do
        if v no marcado then
            encolar v en Q
            marcar v
            previo.put(v,x)
Return false
```

Nota: Encuentra el camino más corto en cantidad de arcos entre s y t

$T(n,m) = O(n+m)$

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

9

Recuperación del camino

Recuperar(s, t, previo) : Lista

$x \leftarrow t$

Mientras $x \neq \text{null}$

 apilar x en pila p

$x \leftarrow \text{previo.get}(x)$

Fin mientras

Crear Lista L

Mientras p no vacía

 L.addLast(p.pop())

Retornar L

$T(n) = O(n)$ cuando addLast funciona en $O(1)$ con n la longitud del camino (que se puede acotar con la cantidad de vértices del grafo)

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

10

Recuperación del camino (versión 2)

Recuperar(s, t, previo) : Lista

$x \leftarrow t$

Crear Lista L

Mientras $x \neq \text{null}$

 L.addFirst(x)

$x \leftarrow \text{previo.get}(x)$

Fin mientras

Retornar L

$T(n) = O(n)$ cuando con n la longitud del camino (que se puede acotar con la cantidad de vértices del grafo)

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

11

Algoritmo de Dijkstra

- Suponga un digrafo G tal que cada arco tiene costo no negativo, Dijkstra computa los caminos de costo mínimo desde un vértice *a* a todos los otros vértices de G.
- El vértice *a* se conoce como la *fuerza*.
- El costo del camino es la suma de los pesos de los arcos del camino.
- El algoritmo mantiene un conjunto S con los vértices cuyo camino con la distancia más corta es conocida.
- S inicialmente está vacío.
- En cada paso se agrega a S el vértice *u* cuya distancia a la fuente es tan cercana como es posible.
- El algoritmo termina cuando S contiene todos los vértices.
- La salida del algoritmo son dos mapeos $D : V \rightarrow \text{Float}$ y $P : V \rightarrow V$ tal que:
 - $D(v)$ es la distancia a v desde la fuente
 - $P(v)$ es el vértice anterior a v en el camino desde la fuente a v.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

12

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Algoritmo Dijkstra
Entrada: G : digrafo simple conexo con todos los pesos positivos y a : Vertice { G tiene vértices $a=v_0, v_1, \dots, v_n$ y pesos $w(v_i, v_j)$ donde $w(v_i, v_j)=\infty$ si (v_i, v_j) no es un arco en G }
Salida: D : mapeo de vértice en float y P : mapeo de vértice en vértice

```

for i := 1 to n do begin
    D(i) := ∞
    P(i) := 0
end
D(a) := 0
S := ∅
for i := 1 to n do begin
    u := un vértice no en S con D(u) mínimo
    S := S U { u }
    for cada vértice v adyacente a u y que no está en S do
        if D(u) + w(u,v) < D(v) then begin
            D(v) := D(u) + w(u,v)
            P(v) := u
        end
    end
end
return (P,D)
    
```

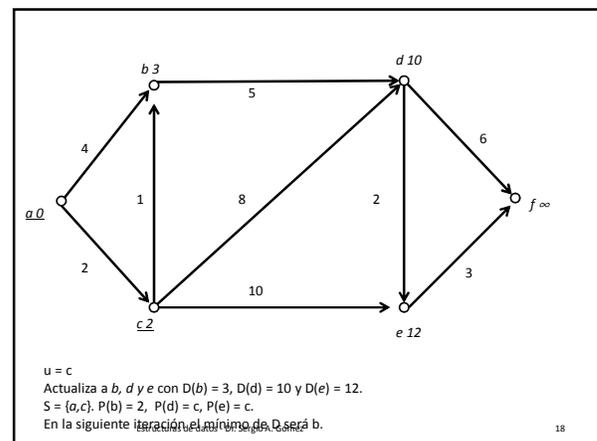
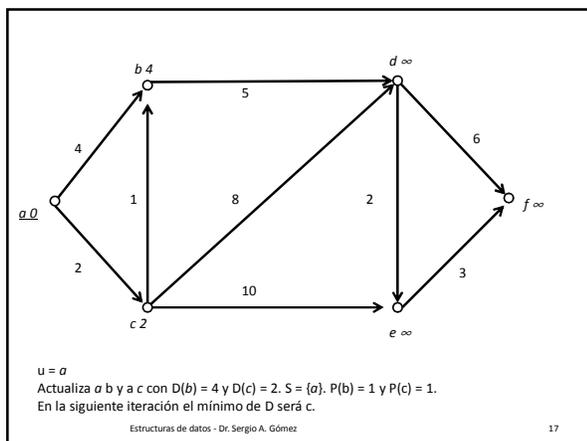
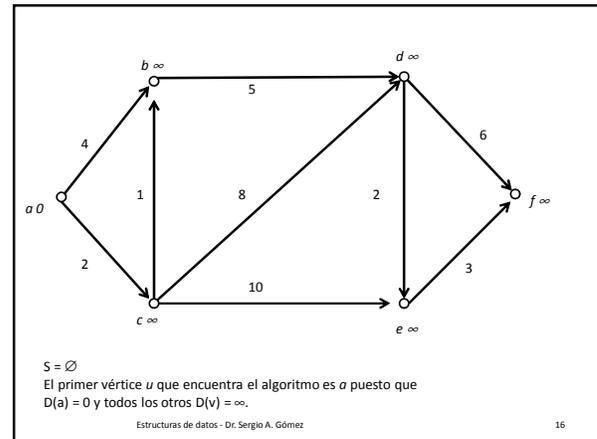
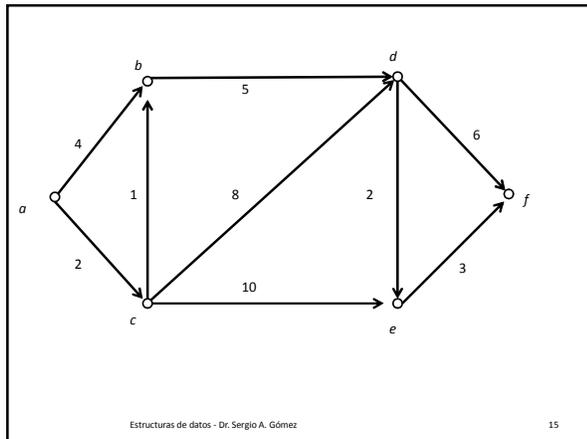
13

Algoritmo Dijkstra
Entrada: G : digrafo simple conexo con todos los pesos positivos y a : Vertice { G tiene vértices $a=v_0, v_1, \dots, v_n$ y pesos $w(v_i, v_j)$ donde $w(v_i, v_j)=\infty$ si (v_i, v_j) no es un arco en G }
Salida: D : mapeo de vértice en float y P : mapeo de vértice en vértice

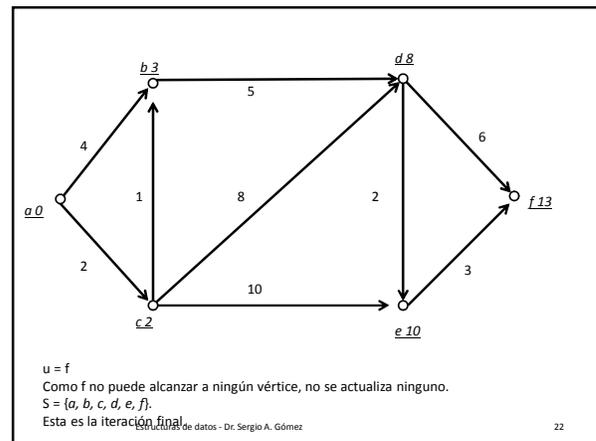
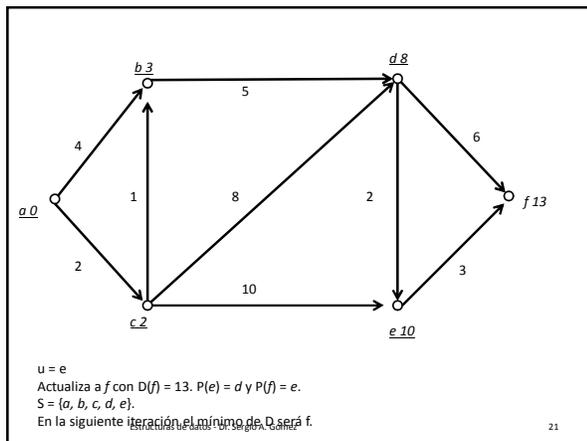
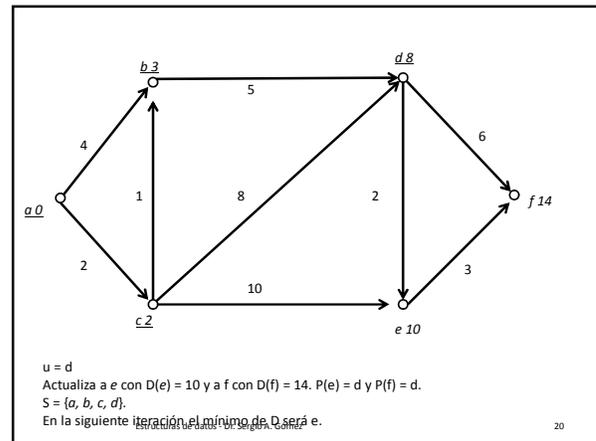
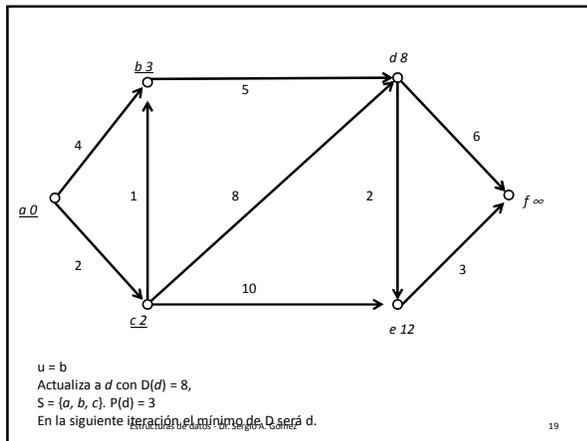
```

for i := 1 to n do begin
    D(i) := ∞
    P(i) := 0
end
D(a) := 0
S := ∅
for i := 1 to n do begin
    u := un vértice no en S con D(u) mínimo
    S := S U { u }
    for cada vértice v adyacente a u y que no está en S do
        if D(u) + w(u,v) < D(v) then begin
            D(v) := D(u) + w(u,v)
            P(v) := u
        end
    end
end
return (P,D)
    
```

14



El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.



Recuperación del camino en Dijkstra

A partir del mapeo P , dado un vértice v destino, el camino de costo mínimo de la fuente a v es $D(v)$ y el camino en orden inverso es $v, P(v), P(P(v)), P(P(P(v))), \dots$

Algoritmo recuperar(P , destino, a)

```

cola ← new Cola()
cola.enqueue( a ) { encolo la fuente }
recuperar_aux( P, destino, cola )
retornar cola
  
```

Algoritmo recuperar_aux($P, v, cola$)

```

anterior ← P(v)
Si anterior = 0 entonces
  { el camino es directo (xq el anterior es la fuente ) y terminamos }
Sino
  recuperar_aux( P, anterior, cola )
cola.enqueue( anterior )
  
```

Nota: $T_{recuperar}(n) = O(n)$. **Nota:** La recuperación se puede plantear en forma iterativa usando un **while** y una pila.

Programación dinámica

La programación dinámica es un método para resolver un problema dividiéndolo en una colección de subproblemas menores, resolviendo esos subproblemas sólo una vez, y almacenando sus soluciones usando una estructura de datos en memoria principal (e.g. arreglo, mapeo, etc.)

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Fibonacci tradicional

```
int fib(int n) {
    if (n==0 || n==1) return n;
    else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

Considerando el árbol de llamadas recursivas, se puede ver que el orden del tiempo de ejecución de esta función es exponencial porque vuelve a recalcular muchos resultados intermedios.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 25

Fibonacci con programación dinámica

```
int fib(int n, int [] resultados) {
    if (resultados[n] != 0) return resultados[n];
    if (n==1){ resultados[1]=1; return resultados[1]; }
    else { resultados[n] = fib(n-1)+fib(n-2); return resultados[n]; }
}
```

La resolución de estas invocaciones ahora tienen tiempo constante porque simplemente recuperan el valor de fib(n) de resultados[n].

Al usar un arreglo *resultados* para almacenar los resultados intermedios ya calculados, se puede bajar el orden a n.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 26

Hacia el algoritmo de Warshall: Cómputo de la clausura transitiva R* de una relación binaria R

- Una relación binaria R es transitiva cuando aRb y bRc implica aRc.
- Dado un grafo que representa una relación R, el algoritmo de Warshall permite computar la clausura transitiva de R, notada como R*.
- La clausura transitiva de R es la relación transitiva más pequeña que contiene a R.
- Cuando R es representada con un grafo G dirigido, si R no es transitiva, entonces G no contiene todos los arcos para los vértices que pueden ser unidos mediante caminos.
- Ej: R = { (1,2), (2,3) } entonces R* = R U {(1,3)} pues es posible ir de 1 a 3 (pasando por 2).

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 27

Cómo calcular R*

- Si la relación R entre n elementos se representa con una matriz booleana de nxn (booleana quiere decir formada por 1s y 0s), entonces Rⁿ (es decir, R x R x R x...xR realizado n veces, con "x" representado el producto booleano de matrices).
- La clausura R* se calcula como R U R² U R³ U U Rⁿ, donde U representa el join-booleano (or-booleano componente a componente) entre matrices.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 28

EXAMPLE 7 Find the zero-one matrix of the transitive closure of the relation R where

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution: From Theorem 3, it follows that the zero-one matrix of R* is

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]}$$

Since

$$M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } M_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

it follows that

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 29

```
// Realiza la clausura transitiva de una matriz booleana
// cuadrada de tamaño n en O(n^4)
public static void clausura_transitiva(
    int[][] a, int n, int [][] a_star){
    int [][] prod = new int[n][n];
    int [][] prod_2 = new int[n][n];

    copiar(a, prod, n, n);
    for(int i=1; i<n; i++) { // n-1 iteraciones
        producto(prod, a, n, n, prod_2); // O(n^3)
        hacer_join(prod_2, prod, n, n); // O(n^2)
    }
    copiar(prod, a_star, n, n); // O(n^2)
}

// Copia la matriz a en la b
public static void copiar(int [][] a,
    int [][] b, int n, int m) {
    for(int i=0; i<n; i++)
        for(int j=0; j<m; j++)
            b[i][j] = a[i][j];
}
```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 30

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

```
// Hace el join booleano de las matrices a y b de n x m.
// Hacer max(x,y) es lo mismo que hacer x or y
public static void hacer_join(int [][]a, int [][]b, int n, int m) {
    for(int i=0; i<n; i++)
        for(int j=0; j<m; j++)
            b[i][j] = Math.max(b[i][j], a[i][j]);
}

// Realiza el producto booleano de las matrices a y b de n x p y p x m resp.
// hacer max(x,y) es lo mismo que hacer x or y
// hacer min(x,y) es lo mismo que hacer x and y
public static void producto(int [][] a, int [][] b,
    int n, int p, int m, int [][] c) {
    for(int i=0; i<n; i++)
        for(int j=0; j<m; j++) {
            c[i][j] = 0;
            for(int k=0; k<p; k++)
                c[i][j] = Math.max(c[i][j], Math.min(a[i][k], b[k][j]));
        }
}
```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 31

Estrategia: Para cada vértice k, para cada par de vértices (i,j) ver si puedo conectar i con j a través de k y si es así, agregar (i,j) a la clausura transitiva.

Procedure Warshall(M_R : Matriz booleana de $n \times n$)

$W := M_R$

for k := 1 to n do

 for i := 1 to n do

 for j := 1 to n do

$w(i,j) := w(i,j)$ or $(w(i,k)$ and $w(k,j))$

End { $W = [w_{ij}]$ es M_{R^*} }

$T_{warshall}(n) = O(n^3)$

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 32

```
public static void warshall( int [][]a, int n, int [][]w) {
    copiar(a, w, n, n); // O(n^2)
    for(int k=0; k<n; k++) // n iteraciones
        for(int i=0; i<n; i++) // n iteraciones
            for(int j=0; j<n; j++) // n iteraciones
                w[i][j] = Math.max(w[i][j],
                    Math.min(w[i][k], w[k][j])); // O(1)
    // El procedimiento tiene O(n^3)
}
```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 33

Algoritmo de Floyd: Caminos mínimos

- Dado un digrafo pesado $G=(V,A)$ donde cada arco tiene un peso numérico no negativo.
- Queremos calcular los caminos de costo mínimo de todos los vértices a todos los vértices.
- Supongamos que $C(i,j)$ es peso del arco (i,j) de A.
- Usaremos una matriz A de $n \times n$ tal que inicialmente $A(i,j)=C(i,j)$, o ∞ si no hay arco entre i y j
- En la iteración k-ésima veremos si actualizamos a A de acuerdo a $A_k(i,j) = \min(A_{k-1}(i,j), A_{k-1}(i,k)+A_{k-1}(k,j))$.
- $P(i,j)$ almacenará a k (i.e., uno de los vértices intermedios en el camino de i a j.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 34

Algoritmo Floyd

Para $i \leftarrow 1..n$ hacer

 para $j \leftarrow 1..n$ hacer

 si hay arco (i,j) entonces $A(i,j) \leftarrow C(i,j)$

 sino $A(i,j) \leftarrow \infty$

$P(i,j) \leftarrow 0$ { por defecto el camino es directo }

Para $i \leftarrow 1..n$ hacer

$A(i,i) \leftarrow 0$

Para $k \leftarrow 1..n$ hacer

 para $i \leftarrow 1..n$ hacer

 para $j \leftarrow 1..n$ hacer

 si $a(i,k) + a(k,j) < a(i,j)$ entonces

$a(i,j) \leftarrow a(i,k) + a(k,j)$

$p(i,j) \leftarrow k$

$T_{Floyd}(n) = O(n^3)$

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 35

Recuperación del camino en Floyd

{ Recupera el camino de i a j y lo almacena en cola que inicialmente debe estar vacía. }

Algoritmo RecuperarCamino(P, i, j, cola)

$k \leftarrow P(i, j)$

 si $k \neq 0$ entonces

 RecuperarCamino(P, i, k, cola)

 cola.enqueue(k)

 RecuperarCamino(P, k, j, cola)

$T_{RecuperarCamino}(n) = O(n)$ para un grafo de n vértices.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 36

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Bibliografía

- Capítulo 13 de M. Goodrich & R. Tamassia, Data Structures and Algorithms in Java. Fourth Edition, John Wiley & Sons, 2006.

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
"Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.