

Estructuras de Datos

Clase 17 – Grafos (Tercera Parte)



Dr. Sergio A. Gómez
<http://cs.uns.edu.ar/~sag>



Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, Argentina

Algoritmos para encontrar caminos en digrafos pesados con números reales

- DFS pinchado (st-path search): Permite encontrar un camino entre dos vértices s y t
- BFS para hallar camino con cantidad mínima de arcos.
- DFS con backtracking, marca y desmarca: Permite encontrar un camino de costo mínimo entre dos vértices s y t
- Dijkstra: Permite hallar todos caminos de costo mínimo entre un vértice a y todos los otros vértices
- Floyd: Permite hallar el camino de costo mínimo entre cada par de vértices s y t .

DFS pinchado (s-t path search)

Permite hallar un camino en el digrafo G entre Origen y Destino y retorna el camino hallado en Camino (el cual es una lista vacía al principio).

Si encontró un camino, retorna verdadero, en caso contrario retorna falso.

Algoritmo HallarCamino(G, origen, destino, camino) : boolean

origen.put(Estado, Visitado)

camino.addLast(origen)

Si origen = destino **entonces**

retornar verdadero

Sino

para cada adyacente v de origen en G **hacer**

si v.get(Estado) = NoVisitado **entonces**

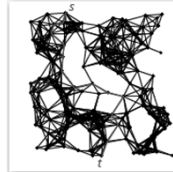
encontre \leftarrow HallarCamino(G, v, destino, camino)

si encontre **entonces retornar** verdadero

{ Cuando no encontré, hago backtracking: Borro origen del camino. }

Camino.remove(camino.last())

retornar falso



Complejidad:

$T(n,m) = O(n+m)$

Ejercicio: Codificar en

Java

Estrategia para hallar ciclos

{ Encuentra un ciclo que contenga a v, buscando caminos desde los adyacentes de v (que se llaman w) hacia v. Ciclo es una lista inicialmente vacía }

Algoritmo HallarCiclo(G, v, ciclo)

encontre \leftarrow falso

mientras hay adyacentes para considerar y no encontre **hacer**

w \leftarrow siguiente adyacente de v en G

encontre \leftarrow HallarCamino(G, w, v, camino)

finmientras

si encontre **entonces**

ciclo.addLast(v)

para cada vertice x de camino **hacer**

ciclo.addLast(x)

finpara

fin $T_{\text{hallarciclo}}(n,m) = O(\text{grado}(v) * (n+m) + n)$

DFS con marca y desmarca

Dado un digrafo pesado con números reales, permite hallar un camino de costo mínimo entre dos vértices origen y destino computando el camino y su costo (entendido como la suma de los pesos de los arcos).

El tiempo de ejecución para un grafo que tiene todos los arcos entre cada par de nodos es $O(n!)$ (en la práctica esto es mucho menos, porque $n!$ se da en el peor caso que es cuando todos los vértices están conectados con todos los otros vértices)

Al comienzo, *camino_actual* es una lista vacía y *costo_camino_actual* es 0.

El costo del camino es la suma de los pesos de los arcos del camino.

Algoritmo HallarCaminoMinimo(G, origen, destino, camino_actual, costo_camino_actual, camino_minimo, costo_camino_minimo)

origen.put(Estado, Visitado)

Camino_actual.addLast(origen)

Si origen = destino **entonces**

Si costo_camino_actual < costo_camino_minimo **entonces**

 camino_minimo ← camino_actual

 costo_camino_minimo ← costo_camino_actual

Sino

para cada adyacente v de origen en G **hacer**

si v.get(Estado) = NoVisitado **entonces**

 HallarCaminoMinimo(G, v, destino, camino_actual,

 costo_camino_actual + peso(origen,v), camino_minimo,

 costo_camino_minimo)

 camino_actual.remove(camino_actual.last()) { *backtracking* }

 origen.put(Estado, NoVisitado)

Mantenimiento del costo mínimo

Java tiene pasaje de parámetros por valor.

Por lo tanto, programar código erróneo como:

```
void buscar_camino( ... float costo_actual, Float costo_minimo, .... ) {
    If( costo_actual < costo_minimo ) {
        ....
        costo_minimo = costo_actual;
        ....
    }
}
```

No funciona incluso usando Float (clase wrapper de float).

Forma correcta del mantenimiento del costo mínimo

Por lo tanto se recomienda usar una clase:

```
class Solucion {
    float costo;
    ... setters y getters para el costo...
}
```

O mejor aún:

```
class Solucion<A> {
    A estado;
    ... setters y getters para el estado ...
}
```

BFS para hallar caminos

```
// Retorna true si hay camino de s a t en G.
// Previo es un mapeo tal que previo.get(v) retorna el nodo previo de v
// en el camino de s a v.
BFSsearch( G : Graph<V,E>, s : Vertex<V>, t : Vertex<V>;
           previo: Map<Vertex<V>, Vertex<V>> ) : boolean
encolar s en Q; marcar s
while Q no está vacía Do
    desencolar x de Q
    if x = t then return true
    for cada adyacente v de x do
        if v no marcado then
            encolar v en Q
            marcar v
            previo.put(v,x)
Return false
Nota: Encuentra el camino más corto en cantidad de arcos entre s y t
 $T(n,m) = O(n+m)$ 
```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

9

Recuperación del camino

```
Recuperar( s, t, previo ) : Lista
 $x \leftarrow t$ 
Mientras  $x \neq \text{null}$ 
    apilar x en pila p
     $x \leftarrow \text{previo.get}(x)$ 
Fin mientras
Crear Lista L
Mientras p no vacía
    L.addLast(p.pop())
Retornar L

 $T(n) = O(n)$  cuando addLast funciona en  $O(1)$  con n la longitud
del camino (que se puede acotar con la cantidad de vértices del
grafo)
```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

10

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 “Estructuras de Datos. Notas de Clase”. Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Recuperación del camino (versión 2)

Recuperar(s, t, previo) : Lista

$x \leftarrow t$

Crear Lista L

Mientras $x \neq \text{null}$

L.addFirst(x)

$x \leftarrow \text{previo.get}(x)$

Fin mientras

Retornar L

$T(n) = O(n)$ cuando con n la longitud del camino (que se puede acotar con la cantidad de vértices del grafo)

Algoritmo de Dijkstra

- Suponga un digrafo G tal que cada arco tiene costo no negativo, Dijkstra computa los caminos de costo mínimo desde un vértice a a todos los otros vértices de G.
- El vértice a se conoce como la *fuente*.
- El costo del camino es la suma de los pesos de los arcos del camino.
- El algoritmo mantiene un conjunto S con los vértices cuyo camino con la distancia más corta es conocida.
- S inicialmente está vacío.
- En cada paso se agrega a S el vértice u cuya distancia a la fuente es tan cercana como es posible.
- El algoritmo termina cuando S contiene todos los vértices.
- La salida del algoritmo son dos mapeos $D : V \rightarrow \text{Float}$ y $P : V \rightarrow V$ tal que:
 - $D(v)$ es la distancia a v desde la fuente
 - $P(v)$ es el vértice anterior a v en el camino desde la fuente a v .

Algoritmo Dijkstra

Entrada: G : digrafo simple conexo con todos los pesos positivos y a : Vertice
 { G tiene vértices $a=v_0, v_1, \dots, v_n$ y pesos $w(v_i, v_j)$ donde $w(v_i, v_j)=\infty$ si (v_i, v_j) no es un arco en G }

Salida: D : mapeo de vértice en float y P : mapeo de vértice en vértice

```

for i := 1 to n do begin
    D(i) := ∞
    P(i) := 0
end
D(a) := 0
S := ∅
for i := 1 to n do begin
    u := un vértice no en S con D(u) mínimo
    S := S U { u }
    for cada vértice v adyacente a u y que no está en S do
        if D(u) + w(u,v) < D(v) then begin
            D(v) := D(u) + w(u,v)
            P(v) := u
        end
    end
end
return (P,D)
  
```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

13

Algoritmo Dijkstra

Entrada: G : digrafo simple conexo con todos los pesos positivos y a : Vertice
 { G tiene vértices $a=v_0, v_1, \dots, v_n$ y pesos $w(v_i, v_j)$ donde $w(v_i, v_j)=\infty$ si (v_i, v_j) no es un arco en G }

Salida: D : mapeo de vértice en float y P : mapeo de vértice en vértice

```

for i := 1 to n do begin
    D(i) := ∞
    P(i) := 0
end
D(a) := 0
S := ∅
for i := 1 to n do begin
    u := un vértice no en S con D(u) mínimo
    S := S U { u }
    for cada vértice v adyacente a u y que no está en S do
        if D(u) + w(u,v) < D(v) then begin
            D(v) := D(u) + w(u,v)
            P(v) := u
        end
    end
end
return (P,D)
  
```

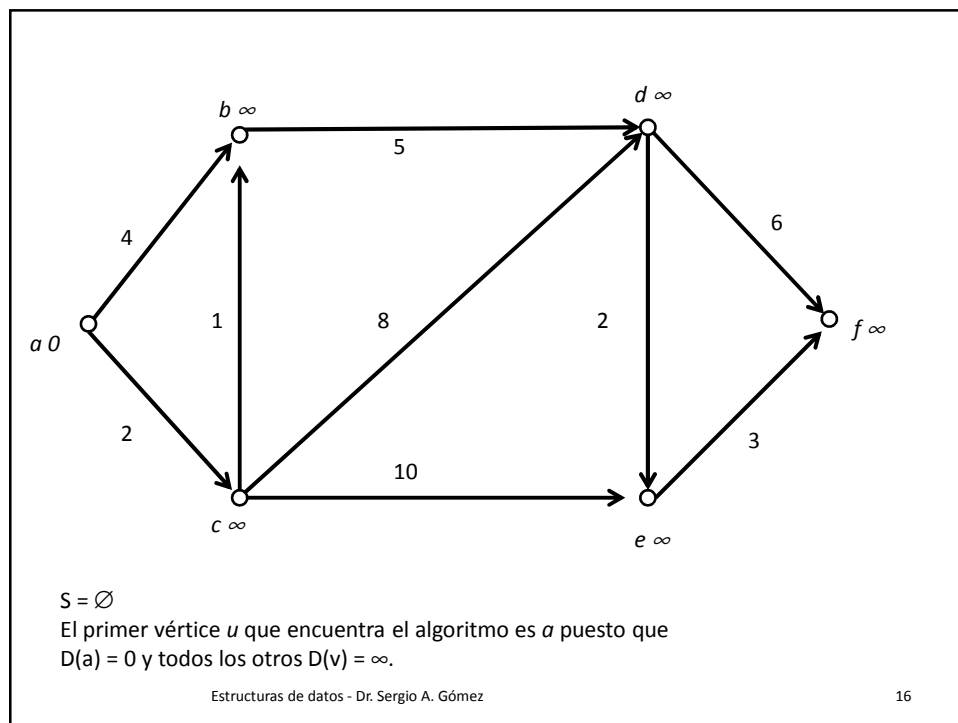
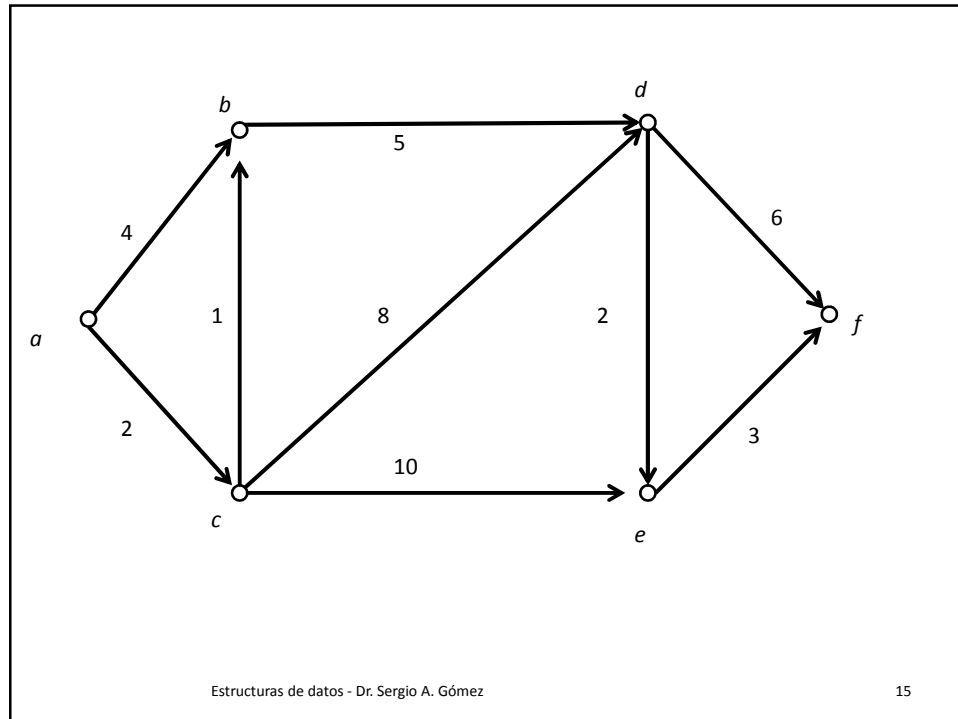
$T_{Dijkstra}(n) = O(n^2)$ si G tiene n vértices y está representado con matriz

$T_{Dijkstra}(n,m) = O(m \log(n))$ (son m actualizaciones a una cola con prioridades adaptable de n elementos), si G está representado con lista de adyacencias y get y put del mapeo tienen $O(1)$.

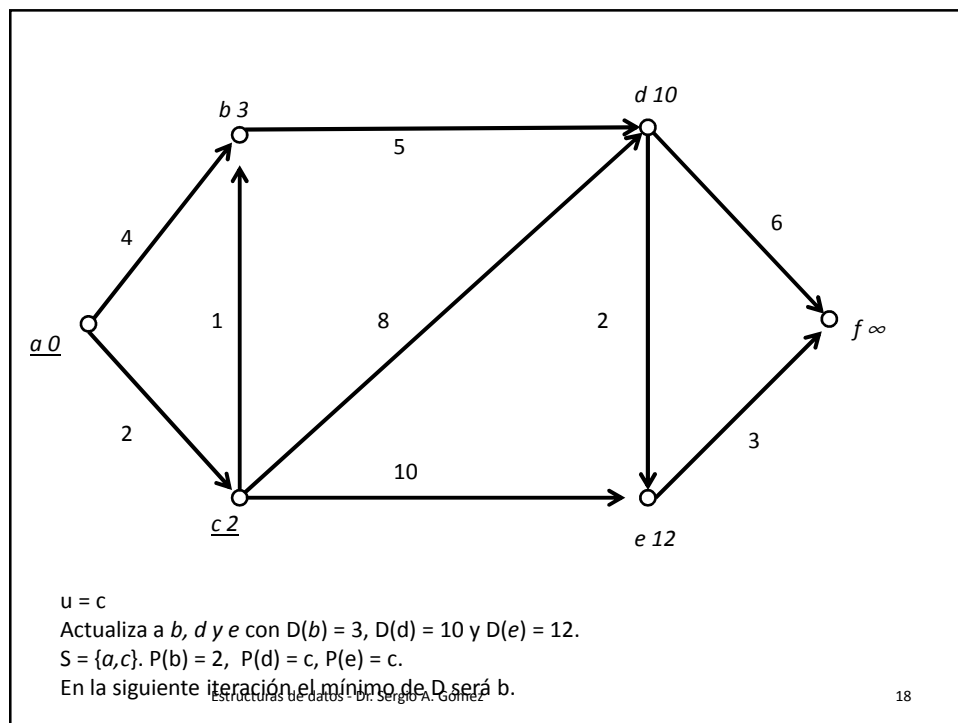
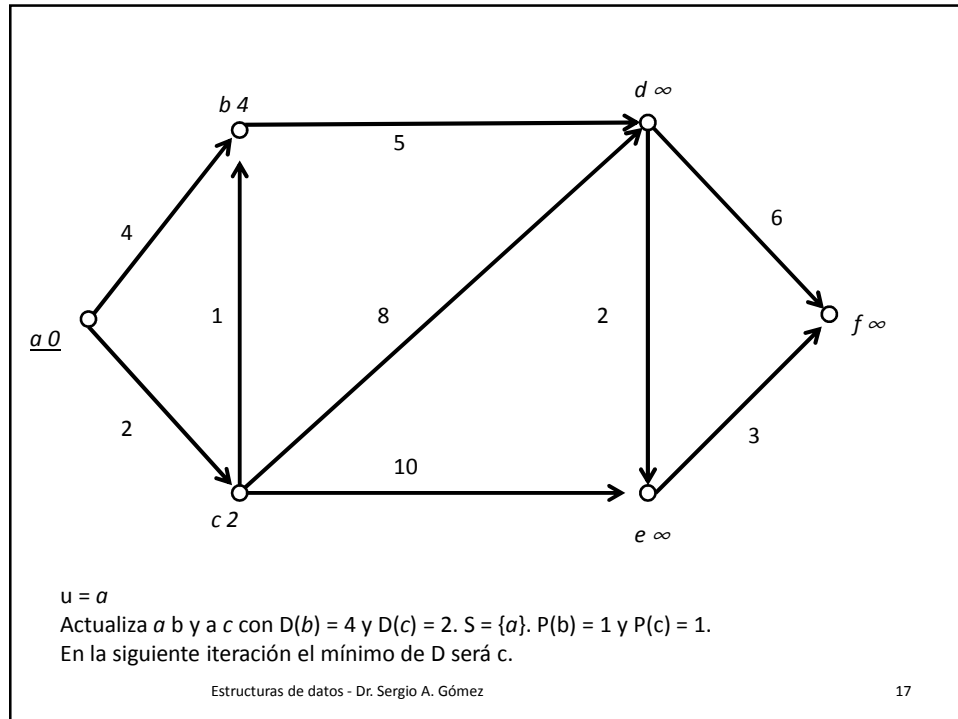
Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

14

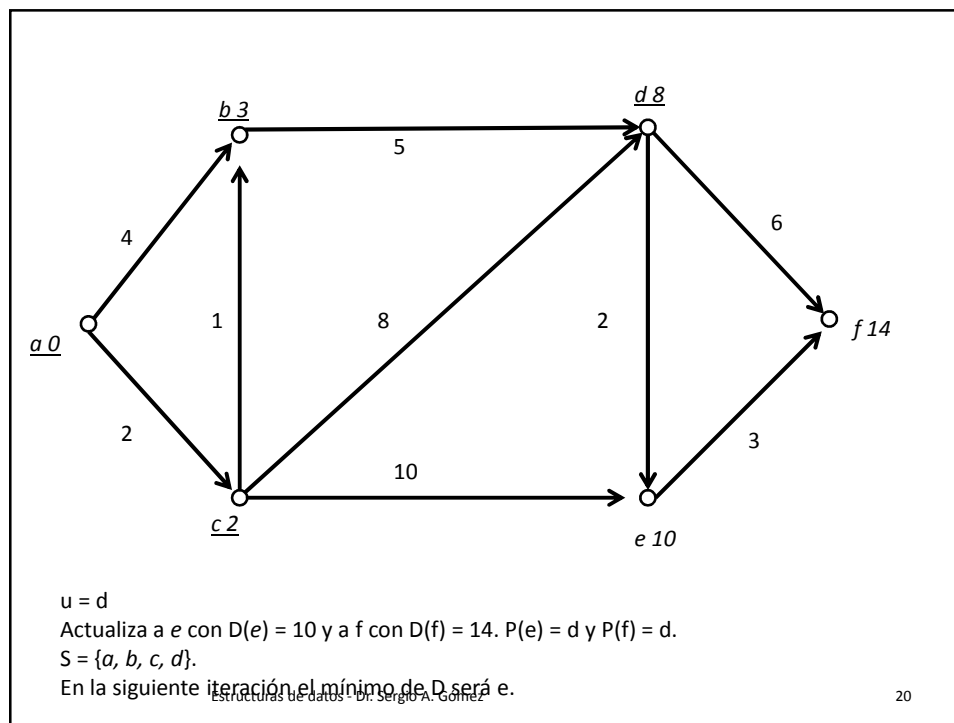
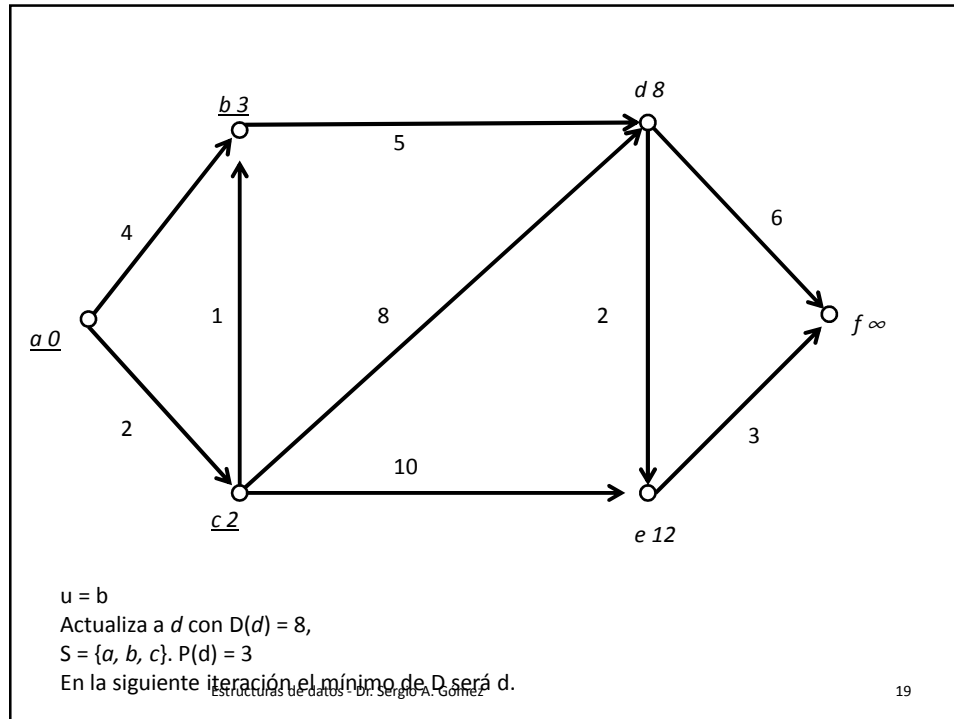
El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.



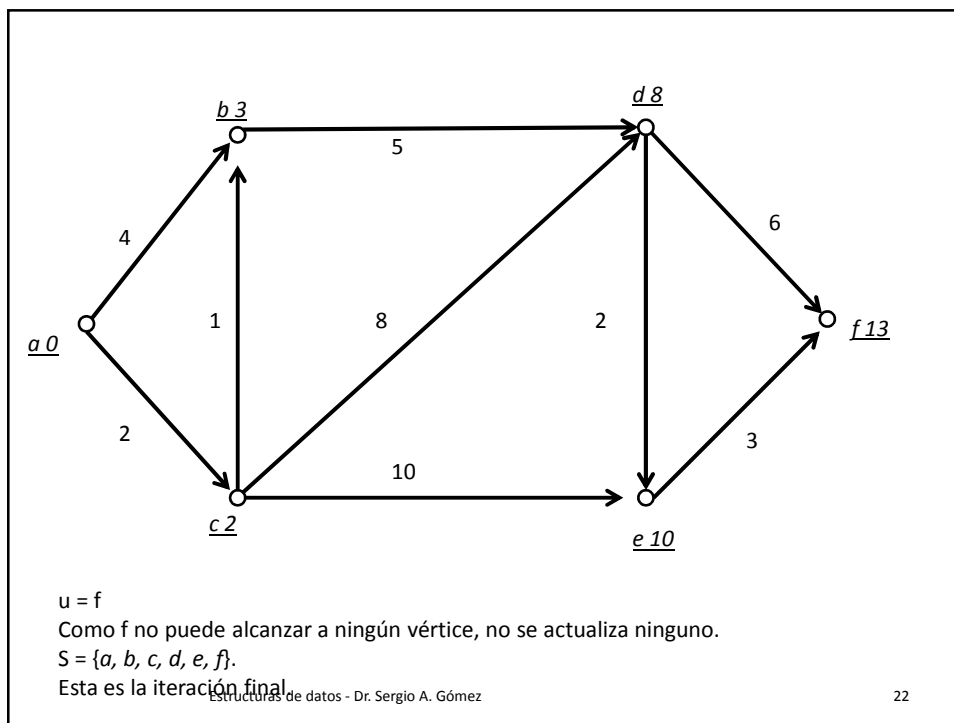
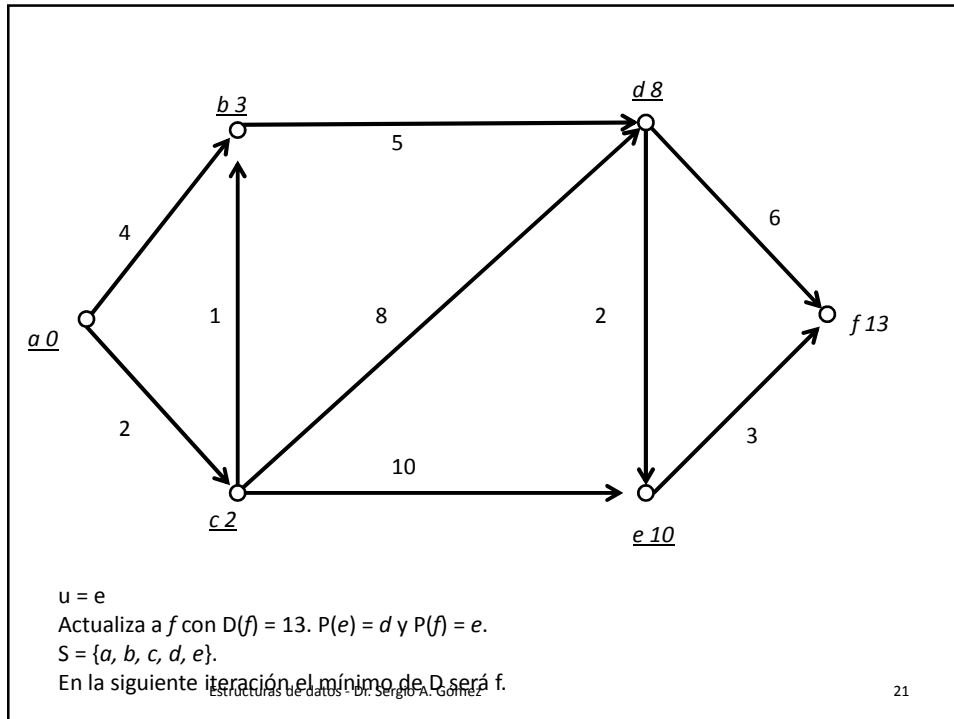
El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.



El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.



El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.



El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Recuperación del camino en Dijkstra

A partir del mapeo P , dado un vértice v destino, el camino de costo mínimo de la fuente a v es $D(v)$ y el camino en orden inverso es $v, P(v), P(P(v)), P(P(P(v))), \dots$

Algoritmo recuperar(P , destino, a)

```
cola ← new Cola()
cola.enqueue( a ) { encolo la fuente }
recuperar_aux( P, destino, cola )
retornar cola
```

Algoritmo recuperar_aux(P , v , cola)

anterior ← $P(v)$

Si anterior = 0 entonces

{ el camino es directo (xq el anterior es la fuente) y terminamos }

Sino

recuperar_aux(P , anterior, cola)

cola.enqueue(anterior)

Nota: $T_{\text{recuperar}}(n) = O(n)$. Nota: La recuperación se puede plantear en forma iterativa usando un while y una pila.

Estructuras de Datos - Dr. Sergio A. Gómez

23

Programación dinámica

La programación dinámica es un método para resolver un problema dividiéndolo en una colección de subproblemas menores, resolviendo esos subproblemas sólo una vez, y almacenando sus soluciones usando una estructura de datos en memoria principal (e.g. arreglo, mapeo, etc.)

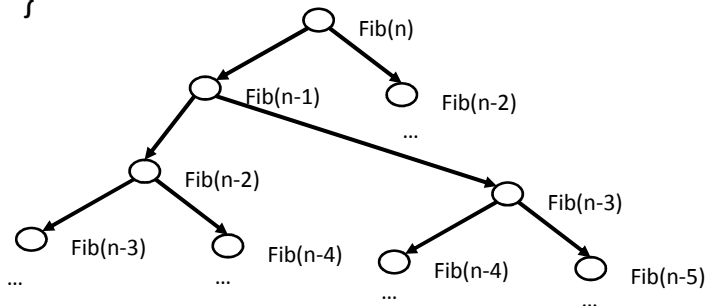
Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

24

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Fibonacci tradicional

```
int fib(int n) {
  if (n==0 || n==1) return n;
  else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```



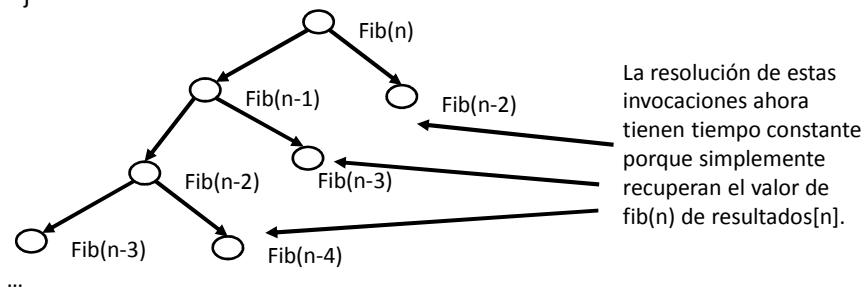
Considerando el árbol de llamadas recursivas, se puede ver que el orden del tiempo de ejecución de esta función es exponencial porque vuelve a recalcular muchos resultados intermedios.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

25

Fibonacci con programación dinámica

```
int fib(int n, int [] resultados) {
  if (resultados[n] != 0) return resultados[n];
  if (n==1){ resultados[1]=1; return resultados[1]; }
  else { resultados[n] = fib(n-1)+fib(n-2); return resultados[n]; }
}
```



La resolución de estas invocaciones ahora tienen tiempo constante porque simplemente recuperan el valor de fib(n) de resultados[n].

Al usar un arreglo *resultados* para almacenar los resultados intermedios ya calculados, se puede bajar el orden a n.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

26

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Hacia el algoritmo de Warshall: Cómputo de la clausura transitiva R^* de una relación binaria R

- Una relación binaria R es transitiva cuando aRb y bRc implica aRc .
- Dado un grafo que representa una relación R , el algoritmo de Warshall permite computar la clausura transitiva de R , notada como R^* .
- La clausura transitiva de R es la relación transitiva más pequeña que contiene a R .
- Cuando R es representada con un grafo G dirigido, si R no es transitiva, entonces G no contiene todos los arcos para los vértices que pueden ser unidos mediante caminos.
- Ej: $R = \{ (1,2), (2,3) \}$ entonces $R^* = R \cup \{(1,3)\}$ pues es posible ir de 1 a 3 (pasando por 2).

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

27

Cómo calcular R^*

- Si la relación R entre n elementos se representa con una matriz booleana de $n \times n$ (booleana quiere decir formada por 1s y 0s), entonces R^n (es decir, $R \times R \times R \times \dots \times R$ realizado n veces, con “ \times ” representado el producto booleano de matrices).
- La clausura R^* se calcula como $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$, donde \cup representa el join-booleano (or-booleano componente a componente) entre matrices.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

28

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: “Estructuras de Datos. Notas de Clase”. Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

EXAMPLE 7 Find the zero-one matrix of the transitive closure of the relation R where

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution: From Theorem 3, it follows that the zero-one matrix of R^* is

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]}.$$

Since

$$\mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

it follows that

$$\mathbf{M}_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 29

```
// Realiza la clausura transitiva de una matriz booleana
// cuadrada de tamaño n en O(n^4)
public static void clausura_transitiva(
    int[][] a, int n, int [][] a_star){
    int [][] prod = new int[n][n];
    int [][] prod_2 = new int[n][n];

    copiar(a, prod, n, n);
    for(int i=1; i<n; i++) { // n-1 iteraciones
        producto(prod, a, n, n, n, prod_2); // O(n^3)
        hacer_join(prod_2, prod, n, n); // O(n^2)
    }
    copiar(prod, a_star, n, n); // O(n^2)
}

// Copia la matriz a en la b
public static void copiar(int [][] a,
    int [][] b, int n, int m) {
    for(int i=0; i<n; i++)
        for(int j=0; j<m; j++)
            b[i][j] = a[i][j];
}
```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 30

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 “Estructuras de Datos. Notas de Clase”. Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

```

// Hace el join booleano de las matrices a y b de n x m.
// Hacer max(x,y) es lo mismo que hacer x or y
public static void hacer_join(int [][]a, int [][]b, int n, int m) {
    for(int i=0; i<n; i++)
        for(int j=0; j<m; j++)
            b[i][j] = Math.max(b[i][j], a[i][j]);
}

// Realiza el producto booleano de las matrices a y b de n x p y p x m resp.
// hacer max(x,y) es lo mismo que hacer x or y
// hacer min(x,y) es lo mismo que hacer x and y
public static void producto(int [][] a, int [][] b,
    int n, int p, int m, int [][] c) {
    for(int i=0; i<n; i++)
        for(int j=0; j<m; j++) {
            c[i][j] = 0;
            for(int k=0; k<p; k++)
                c[i][j] = Math.max(c[i][j], Math.min(a[i][k], b[k][j]));
        }
}

```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

31

Estrategia: Para cada vértice k , para cada par de vértices (i,j) ver si puedo conectar i con j a través de k y si es así, agregar (i,j) a la clausura transtiva.

Procedure Warshall(M_R : Matriz booleana de $n \times n$)

$W := M_R$

for $k := 1$ to n do

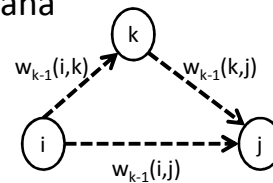
 for $i := 1$ to n do

 for $j := 1$ to n do

$w(i,j) := w(i,j)$ or $(w(i,k)$ and $w(k,j))$

End { $W = [w_{ij}]$ es M_{R^*} }

$T_{\text{warshall}}(n) = O(n^3)$



Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

32

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.


```

public static void warshall( int [][]a, int n, int [][]w) {
    copiar(a, w, n, n); // O(n^2)
    for(int k=0; k<n; k++) // n iteraciones
        for(int i=0; i<n; i++) // n iteraciones
            for(int j=0; j<n; j++) // n iteraciones
                w[i][j] = Math.max(w[i][j],
                    Math.min(w[i][k], w[k][j])); // O(1)
    // El procedimiento tiene O(n^3)
}

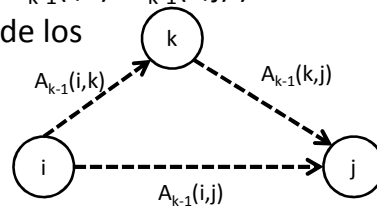
```

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

33

Algoritmo de Floyd: Caminos mínimos

- Dado un digrafo pesado $G=(V,A)$ donde cada arco tiene un peso numérico no negativo.
- Queremos calcular los caminos de costo mínimo de todos los vértices a todos los vértices.
- Supongamos que $C(i,j)$ es peso del arco (i,j) de A .
- Usaremos una matriz A de $n \times n$ tal que inicialmente $A(i,j)=C(i,j)$, o ∞ si no hay arco entre i y j
- En la iteración k -ésima veremos si actualizamos a A de acuerdo a $A_k(i,j) = \min(A_{k-1}(i,j), A_{k-1}(i,k)+A_{k-1}(k,j))$.
- $P(i,j)$ almacenará a k (i.e., uno de los vértices intermedios en el camino de i a j).



Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

34

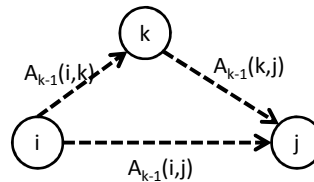
El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Algoritmo Floyd

Para $i \leftarrow 1..n$ hacer
 para $j \leftarrow 1..n$ hacer
 si hay arco (i,j) entonces $A(i,j) \leftarrow C(i,j)$
 sino $A(i,j) \leftarrow \infty$
 $P(i,j) \leftarrow 0$ { por defecto el camino es directo }

Para $i \leftarrow 1..n$ hacer
 $A(i,i) \leftarrow 0$

Para $k \leftarrow 1..n$ hacer
 para $i \leftarrow 1..n$ hacer
 para $j \leftarrow 1..n$ hacer
 si $a(i,k) + a(k,j) < a(i,j)$ entonces
 $a(i,j) \leftarrow a(i,k) + a(k,j)$
 $p(i,j) \leftarrow k$



$$T_{\text{Floyd}}(n) = O(n^3)$$

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

35

Recuperación del camino en Floyd

{ Recupera el camino de i a j y lo almacena en cola que inicialmente debe estar vacía. }

Algoritmo RecuperarCamino(P, i, j, cola)

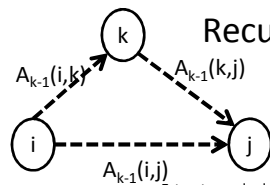
$k \leftarrow P(i, j)$

si $k \neq 0$ entonces

RecuperarCamino(P, i, k, cola)

$\text{cola.enqueue}(k)$

RecuperarCamino(P, k, j, cola)



$$T_{\text{RecuperarCamino}}(n) = O(n) \text{ para un grafo de } n \text{ vértices.}$$

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez

36

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente: "Estructuras de Datos. Notas de Clase". Sergio A. Gómez. Universidad Nacional del Sur. (c) 2013-2019.

Bibliografía

- Capítulo 13 de M. Goodrich & R. Tamassia, *Data Structures and Algorithms in Java. Fourth Edition*, John Wiley & Sons, 2006.