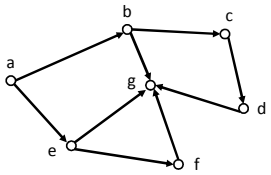
Estructuras de Datos
Clase 15 – Grafos (Primera Parte)

Dr. Sergio A. Gómez
http://cs.uns.edu.ar/~sag

Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, Argentina

Definición: Grafo dirigido

- Un grafo G=(V,E) es un conjunto V de vértices (o nodos) y un conjunto E ⊆ V×V de aristas dirigidas (o arcos dirigidos).
- Intuitivamente E permite representar una relación entre elementos de V.

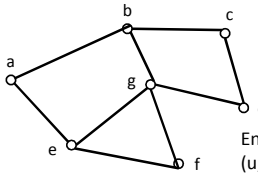


V = { a, b, c, d, e, f, g }
E = { (a,b), (b,c), (c,d), (d,g), (e,g), (e,f), (f,g), (a,e), (b,g) }

En el grafo dirigido, el arco (u,v) es un par ordenado

Definición: Grafo no dirigido

- Un grafo G=(V,E) es un conjunto V de vértices (o nodos) y un conjunto E ⊆ V×V de aristas (o arcos).
- Intuitivamente E permite representar una relación (simétrica) entre elementos de V.



V = { a, b, c, d, e, f, g }
E = { (a,b), (b,c), (c,d), (d,g), (e,g), (e,f), (f,g), (a,e), (b,g) }

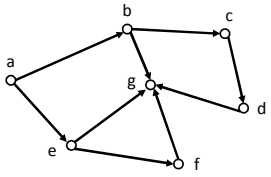
En el grafo no dirigido, el arco (u,v) en realidad es {u,v} ya que (u,v) es lo mismo que (v,u).

- Ejemplo de grafo dirigido: Grafo de herencia de interfaces en Java.
- Ejemplo de grafo dirigido: Grafo donde los nodos son esquinas de una ciudad y los arcos son cuadras de una mano.
- Ejemplo de grafo dirigido: Grafo donde los nodos son números enteros y los arcos indican qué número divide a otro. E.g. como "2 divide a 6", habrá un arco (2,6).
- Ejemplo de grafo no dirigido: Grafo de colaboración entre coautores científicos.
- Ejemplo de grafo no dirigido: Grafo donde los nodos son esquinas de un pueblo chico y los arcos son calles doble mano.

Definiciones

- En un grafo no dirigido, se habla de grado porque los arcos que inciden y los que emergen son los mismos.

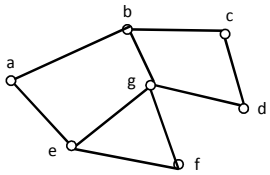
- Arcos que inciden en un vértice v = { (x,y) ∈ E : y=v } = { (x,v) : (x,v) ∈ E }
- Arcos que emergen de un vértice v = {(x,y) ∈ E : x=v } = { (v,y) : (v,y) ∈ E }
- Grado de incidencia/entrada de un vértice v: indegree(v) = cantidad de arcos que inciden en v
- Grado de emergencia/salida de un vértice v: outdegree(v) = cantidad de arcos que emergen de v



Arcos emergentes de b = { (b,c), (b,g) }
Outdegree(b) = 2
Arcos incidente en g = { (b,g), (e,g), (d,g), (f,g) }
Indegree(g) = 4

En un grafo no dirigido, se habla de grado porque los arcos que inciden y los que emergen son los mismos.

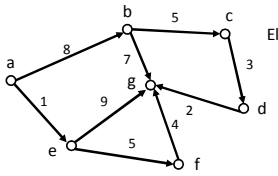
Grado(v) = cantidad de arcos que inciden en v



Grado(b) = 3
Grado(g) = 4

Definiciones

- Grafo pesado: Grafo donde las aristas contienen una etiqueta (o peso cuando las etiquetas son numéricas).

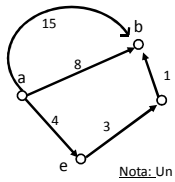


El peso de (c,d) es 3.

- Ejemplo: Digrafo donde los vértices son aeropuertos y los arcos representan vuelos (distancias entre aeropuertos si los pesos son números).

Definiciones

- Multi(di)grafo: (Di)grafo donde el conjunto de arcos es una colección. Es decir puede haber más de un arco entre cada par de vértices (se llaman "arcos paralelos")
- Ejemplo: Digrafo donde los vértices representan aeropuertos, los arcos son vuelos y puede haber más de un vuelo entre dos aeropuertos.

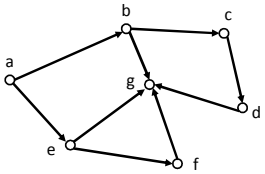


Hay dos arcos que unen "a" con "b", uno con peso 8 y otro con peso 15.

Nota: Un "grafo simple" es un grafo que no es multigrafo.

Definiciones

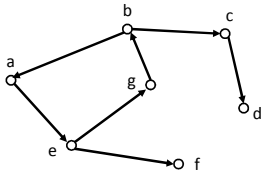
- Camino: Un camino es una secuencia alternante de vértices y arcos tales que empieza en un vértice y termina en otro y cada arco es incidente en sus vértices predecesor y sucesor.



a, b, c, d, g es un camino.
a, e, g es otro camino.

Definiciones

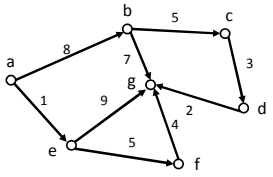
- Ciclo (simple): Un camino que comienza y termina en el mismo vértice (sin repetir arcos).
- Ciclo (camino) dirigido: Un ciclo (camino) donde las aristas tienen dirección y son recorridas en su dirección.



a, e, g, b, a es un ciclo

Definiciones

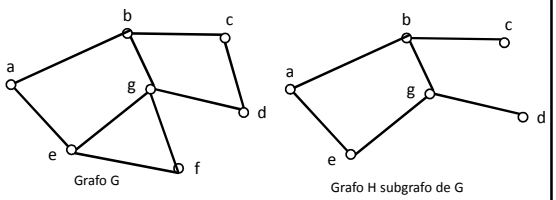
- Costo de un camino (ciclo): Suma de los pesos de los arcos que forman el camino (ciclo)



- Ejemplo: El costo del camino "a, b, c, d, g" es 8+5+3+2=18.

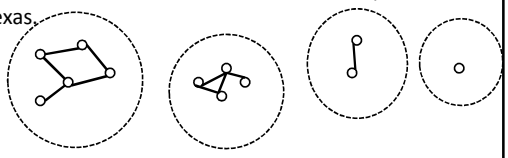
Definiciones

- Subgrafo: Un subgrafo H de un grafo G es un grafo donde los vértices de H son un subconjunto de los vértices de G y los arcos de H son un subconjunto de los arcos de G.



Definiciones

- Grafo conexo: Un grafo G es conexo si para dos vértices cualquiera de G hay un camino entre ellos.
- Componentes conexas: Si un grafo no es conexo, sus subgrafos maximales conexos se llaman componentes conexas.



Este grafo no es conexto porque tiene 4 componentes conexas.

Nota: En grafos dirigidos se habla de "grafo fuertemente conexo" y componente fuertemente conexa porque se pide que los caminos entre vertices sean dirigidos.

ADT Grafo

El tipo de dato abstracto Grafo exporta tres sorts:

- Graph<V,E>: Un grafo pesado de vértices con rótulos de tipo V y arcos con rótulos de tipo E
- Vertex<V>: La posición de un vértice con rótulo de tipo V
- Edge<E>: La posición de un arco con rótulo de tipo E

ADT Grafo

- vertices(): Retorna una colección iterable con todos los vértices del grafo.
- edges(): Retorna una colección iterable con todos los arcos del grafo.
- incidentEdges(v): Retorna una colección iterable con todos los arcos incidentes sobre un vértice v
- emergentEdges(v): Retorna una colección iterable con todos los arcos emergentes de un vértice v (no está en GT, también le podemos decir successorEdges(v))

ADT Grafo

- opposite(v,e): Retorna el otro vértice w del arco e=(v,w); ocurre un error si e no es incidente (o emergente de v).
- endVertices(e): Retorna un arreglo (de 2 componentes) conteniendo los vértices del arco e.
- areAdjacent(v,w): Testea si los vértices v y w son adyacentes.

ADT Grafo

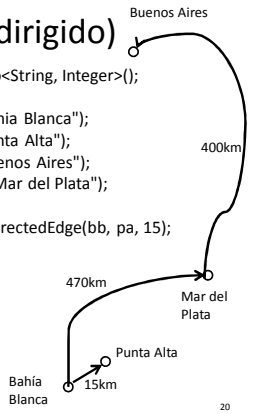
- replace(v,x) : Reemplaza el rótulo del vértice v con x
- replace(e,x): Reemplaza el rótulo del arco e con x
- insertVertex(x): Inserta y retorna un nuevo vértice con rótulo x
- insertEdge(v, w, x): Inserta un arco con rótulo x entre los vértices v y w
- insertDirectedEdge(v, w, x): Inserta un arco dirigido con rótulo x entre los vértices v y w

ADT Grafo

- removeVertex(v): Elimina el vértice v y todos sus arcos adyacentes y retorna el rótulo de v
- removeEdge(e): Elimina el arco e y retorna el rótulo almacenado en e.

ADT Grafo (dirigido)

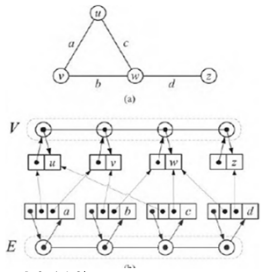
```
Graph<String, Integer> g = new Digrafo<String, Integer>();

Vertex<String> bb = g.insertVertex("Bahia Blanca");
Vertex<String> pa = g.insertVertex("Punta Alta");
Vertex<String> ba = g.insertVertex("Buenos Aires");
Vertex<String> mdp = g.insertVertex("Mar del Plata");

Edge<Integer> vueloBB2PA = g.insertDirectedEdge(bb, pa, 15);
g.insertDirectedEdge(bb, mdp, 470);
g.insertDirectedEdge(mdp, ba, 400);

g.removeEdge(vueloBB2PA);
g.removeVertex(pa);
```



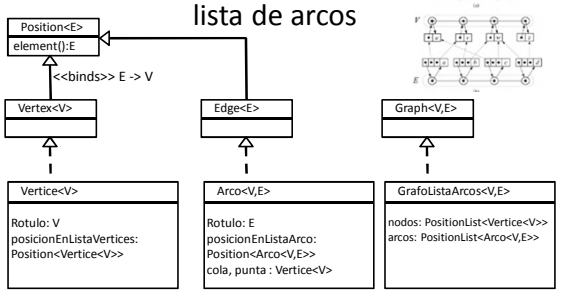
Estructuras de datos para grafos (simples y pesados)

- Lista de arcos: el grafo es una lista de vértices y una lista de arcos (los vértices y los arcos conocen sus rótulos respectivos).
- Lista de adyacencias: El grafo conoce una lista de vértices (opcionalmente también una lista de arcos) y cada vértice conoce su rótulo y los arcos que emergen de él. Los arcos conocen los vértices que unen y su peso.
- Matriz de adyacencias: el grafo es una lista de vértices (opcionalmente conoce también una lista de arcos) y una matriz donde cada componente (i,j) almacena un arco.

Lista de arcos: El grafo conoce una lista de vértices y una lista de arcos.
Los vértices conocen sus rótulos respectivos y su posición en la lista de vértices.
Los arcos conocen su peso, los vértices que unen y su posición en la lista de arcos.

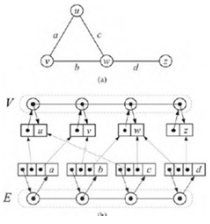


Implementación de lista de arcos



Performance deseada de la lista de arcos

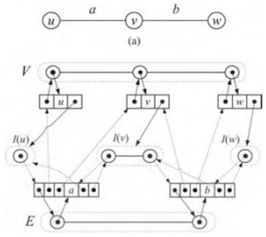
Dado un grafo G=(V,A)
Sea n = #V y m = #A



Operación	Tiempo
vertices()	O(n)
edges()	O(m)
endVertices(e), opposite(v,e)	O(1)
incidentEdges(v), areAdjacent(v,w)	O(m)
replace(v,x), replace(e,x)	O(1)
insertVertex(x), insertEdge(v,w,x), removeEdge(e)	O(1)
removeVertex(v)	O(m)

Lista de adyacencias para un grafo dirigido G=(V,E) de acuerdo a GT

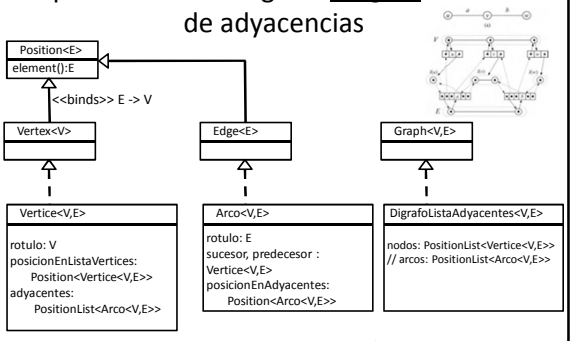
La mejora que propone la lista de adyacencias es introducir un lista que para cada vértice indica los arcos que emergen cuando el grafo es dirigido y los que emergen/inciden cuando el grafo es no dirigido. El libro solo grafica los grafos no dirigidos:



Implementación de digrafo con lista de adyacencias

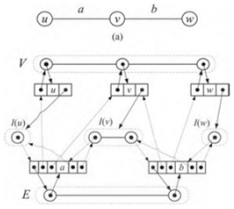
```
public interface Vertex<E> extends Position<E> {   } // Vertex.java (luego lo mejoraremos)

public interface Edge<E> extends Position<E>  {   } // Edge.java (luego lo mejoraremos)

public interface Graph<V, E> {              // Graph.java
        public Iterable<Vertex<V>> vertices();
        public Iterable<Edge<E>> edges();
        // public Iterable<Edge<E>> incidentEdges(Vertex<V> v); // Para no dirigidos [GT]
        public Iterable<Edge<E>> emergentEdges(Vertex<V> v); // No está en GT
        public Vertex<V> opposite(Vertex<V> v, Edge<E> e);
        public Vertex<V> [] endVertices(Edge<E> e);
        public boolean areAdjacent(Vertex<V> v, Vertex<V> w);
        public V replace( Vertex<V> v, V x);
        public E replace( Edge<E> e, E x);
        public Vertex<V> insertVertex(V x);
        public Edge<E> insertEdge(Vertex<V> v, Vertex<V> w, E x);
        public V removeVertex(Vertex<V> v);
        public E removeEdge(Edge<E> e);
}
```


Implementación de grafo dirigido con lista de adyacencias



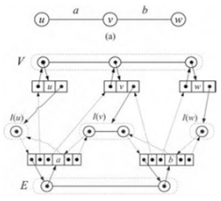
NOTA: La lista de arcos no es estrictamente necesaria. El libro sí la usa. Agregarla queda como ejercicio, lo cual requiere modificar el código presentado a continuación.
NOTA: El libro usa la misma notación para el grafo G=(V,E) y para los tipos de los rótulos de vértice V y rótulos de arco E.

Performance deseada de la lista de adyacencias de acuerdo a GT

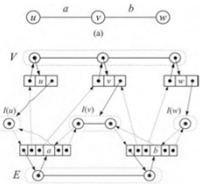


Operación	Tiempo
vertices()	O(n)
edges()	O(m)
endVertices(e), opposite(v,e)	O(1)
emergentEdges(v), areAdjacent(v,w)	O(deg(v))
replace(v,x), replave(e,x)	O(1)
insertVertex(x), insertEdge(v,w,x), removeEdge(e)	O(1)
removeVertex(v)	O(deg(v))


```
// Archivo: Vertice.java (o también se puede
hacer clase anidada privada de la clase
Digrafo.java que implementa Graph)
public class Vertice<V,E> implements Vertex<V> {
private V rotulo;
private PositionList<Arco<V,E>> adyacentes;
private Position<Vertice<V,E>> posicionEnNodos;

public V element() { return rotulo; }

public Vertice( V rotulo ) {
  this.rotulo = rotulo;
  adyacentes = new Lista<Arco<V,E>>();
}
// Setters y getters
public void setRotulo(V nuevoRotulo) { … }
public PositionList<Arco<V,E>> getAdyacentes() { … }
public void
setPosicionEnNodos(Position<Vertice<V,E>> p ) { … }
public Position<Vertice<V,E>> getPosicionEnNodos()
{  … }
}
```

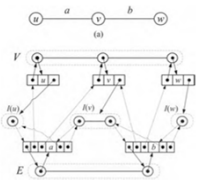



```
// Archivo Arco.java: También se puede hacer clase
anidada y privada de la clase Digrafo que
implementa Graph.
public class Arco<V,E>
        implements Edge<E> {
private E rotulo;
private Vertice<V,E> sucesor, predecesor;
private Position<Arco<V,E>>   posicionEnAdyacentes;
public Arco( E rotulo,
      Vertice<V,E> predecesor,
      Vertice<V,E> sucesor )
{ /* solo setea atributos */          }
public E element() { return rotulo; }
public Vertice<V,E> getPredecesor() { … }
public Vertice<V,E> getSucesor() { … }
public Position<Arco<V,E>>
getPosicionEnAdyacentes() {  … }
public void  setPosicionEnAdyacentes(
        Position<Arco<V,E>> p) {  … }
}
```



```
// Digrafo.java

public class Digrafo<V,E> implements Graph<V,E>
{
    protected PositionList<Vertice<V,E>> nodos;

public Digrafo()  {
    nodos = new Lista<Vertice<V,E>>();
 }

public Iterable<Vertex<V>> vertices() {
   PositionList<Vertex<V>> lista =
                          new Lista<Vertex<V>>();
  for( Vertex<V> v : nodos )
       lista.addLast(v);
  return lista;
}
```

$T_{vertices}(n, m) = O(n)$



Uso:

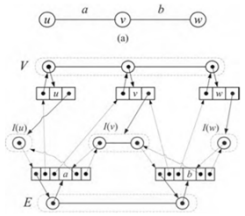
```
for( Vertex<V> v : g.vertices() )
  System.out.println( v.element() );
```

Tarea: Pensar cómo agregar la lista de arcos.


```
// Recordar que los atributos del grafo son:
//     protected PositionList<Vertice<V,E>> nodos;


public Iterable<Edge<E>> edges() {
       PositionList<Edge<E>> lista =
          new ListaDoblementeEnlazada<Edge<E>>();

       for( Vertex<V> v : nodos )
          for( Edge<E> e : emergentEdges(v) )
                lista.addLast(e);

       return lista;
}
```

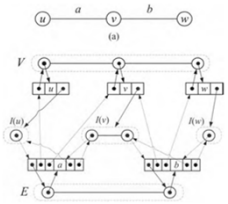
$T_{edges}(n, m) = O(n+m)$

Tarea: Si tengo la lista de arcos, solo tengo que recorrerla (es una optimización propuesta por el libro).



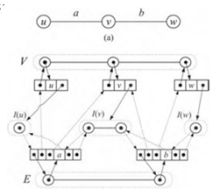

```
// Atributos del grafo:
//     protected PositionList<Vertice<V,E>> nodos;


public Iterable<Edge<E>> emergentEdges( Vertex<V> v) {
PositionList<Edge<E>> lista = new Lista<Edge<E>>();

Vertice<V,E> vert = (Vertice<V,E>) v;
for( Edge<E> e : vert.getAdyacentes() )
          lista.addLast(e);
return lista;
}
```

$T_{emergentEdges}(n,m) = O(deg(v))$




```
// Atributos del grafo:
//     protected PositionList<Vertice<V,E>> nodos;

public Vertex<V> insertVertex(V x) {
          Vertice<V,E> v = new Vertice<V,E>(x);
          nodos.addLast(v);

          v.setPosicionEnNodos(nodos.last());
          return v;
}
```

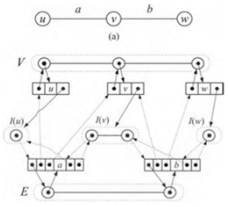
$T_{insertVertex}(n,m) = O(1)$




```
// Atributos del grafo:
//     protected PositionList<Vertice<V,E>> nodos;
//  Inserta un arco dirigido de v a w

public Edge<E> insertEdge(Vertex<V> v, Vertex<V> w, E x) {
   Vertice<V,E> vv = (Vertice<V,E>) v;
   Vertice<V,E> ww = (Vertice<V,E>) w;
   Arco<V,E> arco = new Arco<V,E>( x, vv, ww );
   vv.getAdyacentes().addLast( arco );
   arco.setPosicionEnAdyacentes( vv.getAdyacentes().last() );
   return arco;
}
```

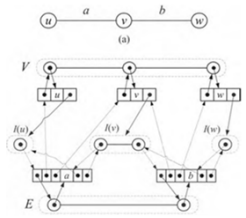
$T_{insertEdge}(n,m) = O(1)$

Discusión: ¿Qué hay que cambiar aquí para lograr la implementación de grafo no dirigido propuesta por el libro?




```
// Atributos del grafo:
//     protected PositionList<Vertice<V,E>> nodos;
public E removeEdge(Edge<E> e) {
 try {
          Arco<V,E> ee = (Arco<V,E>) e;
          Position<Arco<V,E>> pee = ee.getPosicionEnAdyacentes();
          Vertice<V,E> pred = ee.getPredecesor();
          return pred.getAdyacentes().remove(pee).element();
 } catch(InvalidPositionException e) {
          e.printStackTrace();
          return null;
 }
}
```

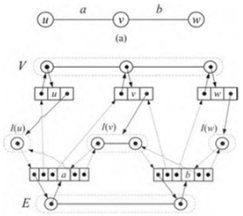
$T_{removeEdge}(n,m) = O(1)$



```
// Atributos del grafo:
//     protected PositionList<Vertice<V,E>> nodos;

// Precondición: Asume que v no tiene arcos adyacentes.
public V removeVertex(Vertex<V> v) {
try {
        Position<Vertice<V,E>> pos = ((Vertice<V,E>) v).getPosicionEnNodos();
        return nodos.remove( pos ).element();
} catch(InvalidPositionException e) {
        e.printStackTrace();
        return null;
}
}
```

$T_{removeVertex}(n,m) = O(1)$

Discusión: Pensar cómo modificarla para primero eliminar todos los arcos que salen del nodo v (como propone GT)



Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez ;7

Bibliografía

- Capítulo 13 de M. Goodrich & R. Tamassia, Data Structures and Algorithms in Java. Fourth Edition, John Wiley & Sons, 2006.

Estructuras de datos - Dr. Sergio A. Gómez 38