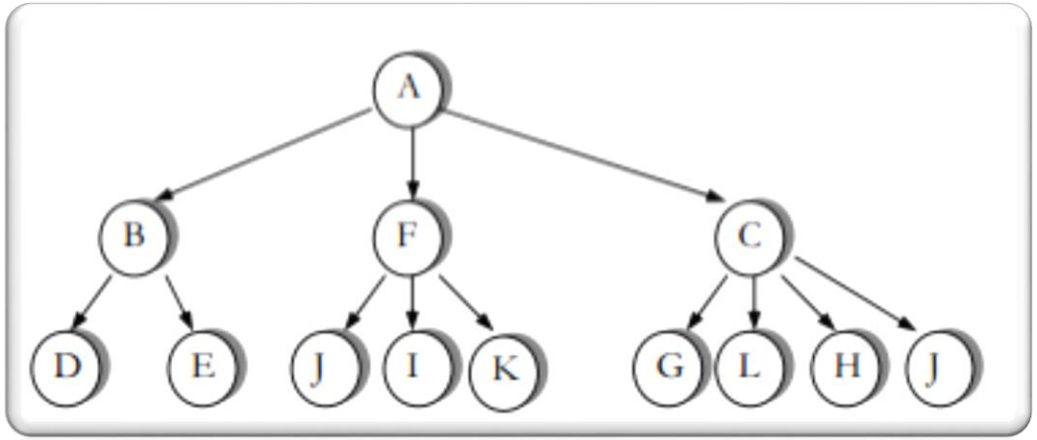
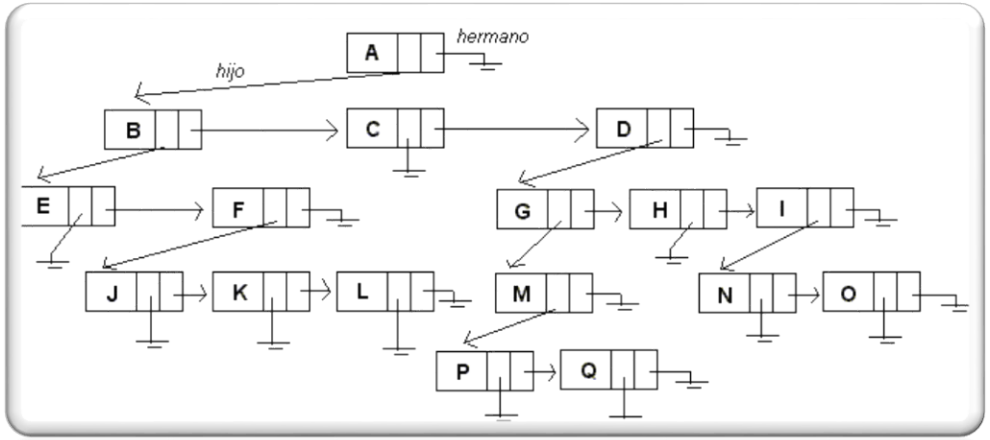
[Estructuras de Datos]





ARBOLES GENERALES.

Copyright

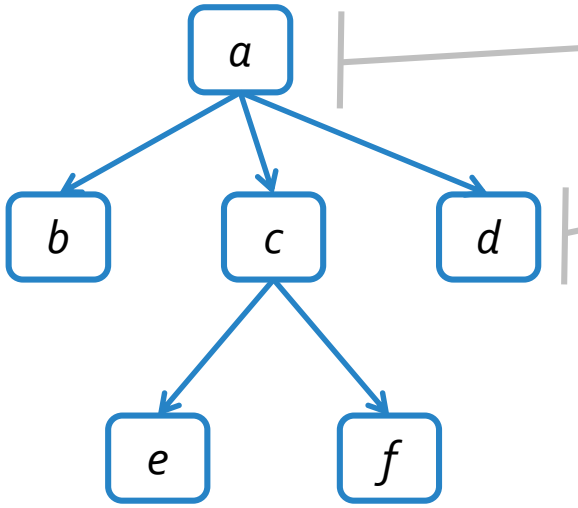
CONCEPTUALIZACIÓN DE UN ÁRBOL

Las representaciones gráficas de los árboles de las siguientes transparencias (parcialmente) son de autoría de la Dra. M. L. Ganuza (mlg@cs.uns.edu.ar).

Introducción: ¿qué es un árbol?

- Un **árbol** es un **TDA** que almacena una **colección de elementos** de forma **jerárquica**.
- Los **elementos** de un árbol son representados mediante **nodos**.
- Cada **nodo n**, a excepción de uno que se distingue como **raíz**, mantiene una única referencia a un **nodo m** que se considera **padre** de **n** en la jerarquía.
- Todos los **nodos** pueden tener **cero o más nodos** que se consideran **hijos** en la jerarquía.

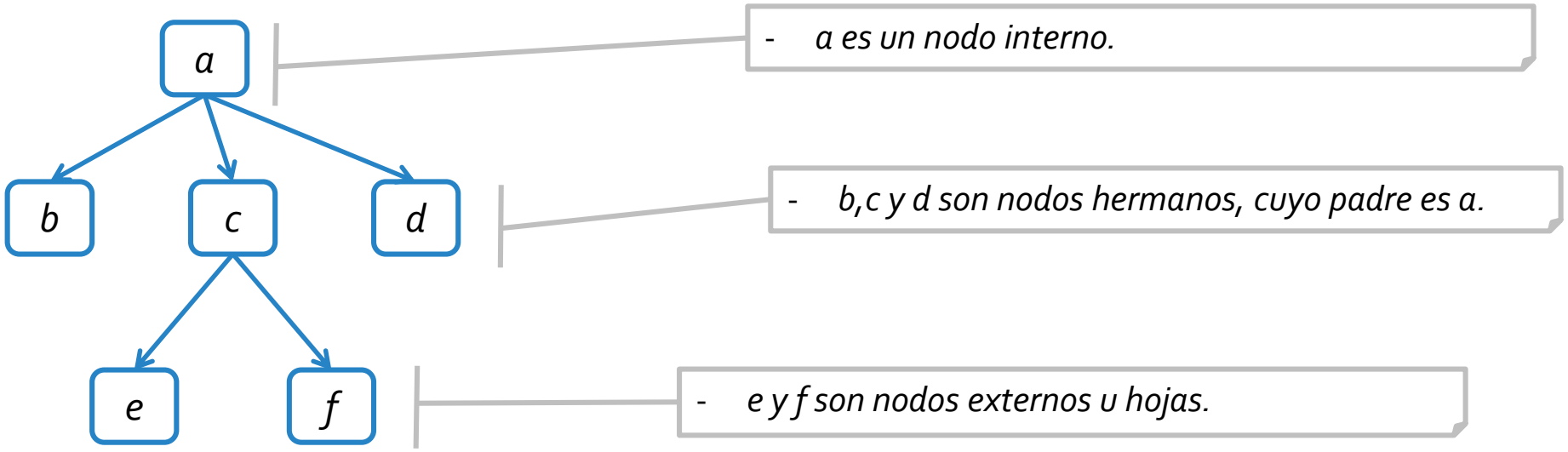
Introducción: ¿qué es un árbol?



- *a es el nodo raíz; único nodo sin padre en la jerarquía.*

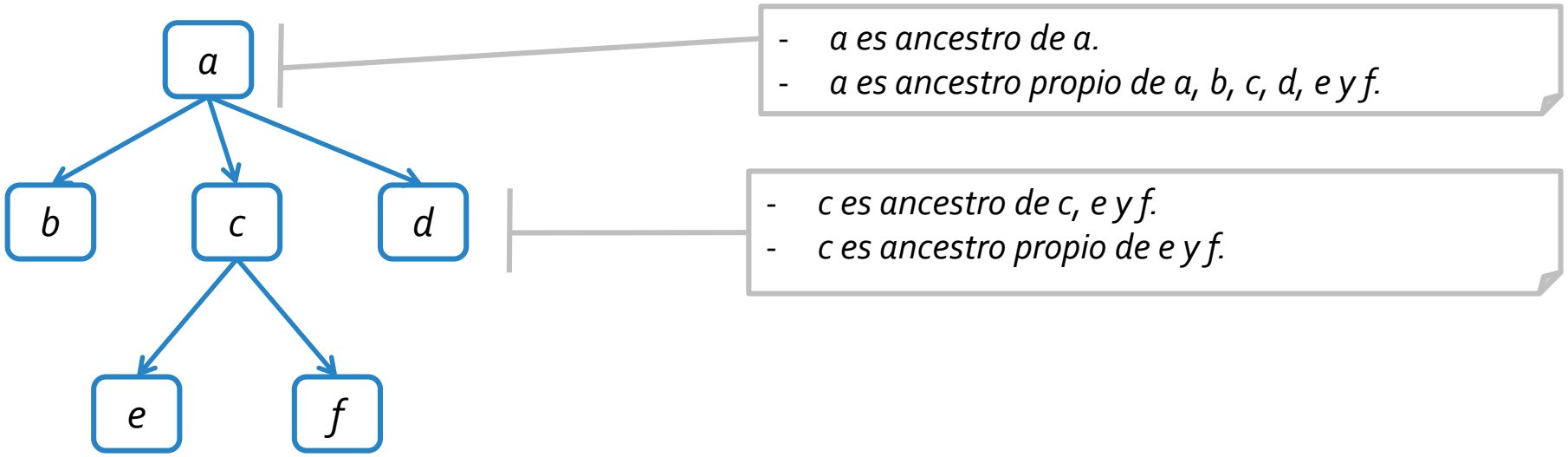
- *b, c y d son nodos hijos de la raíz a.*
- *a es el padre de b,c, y d en la jerarquía.*

Introducción: ¿qué es un árbol?



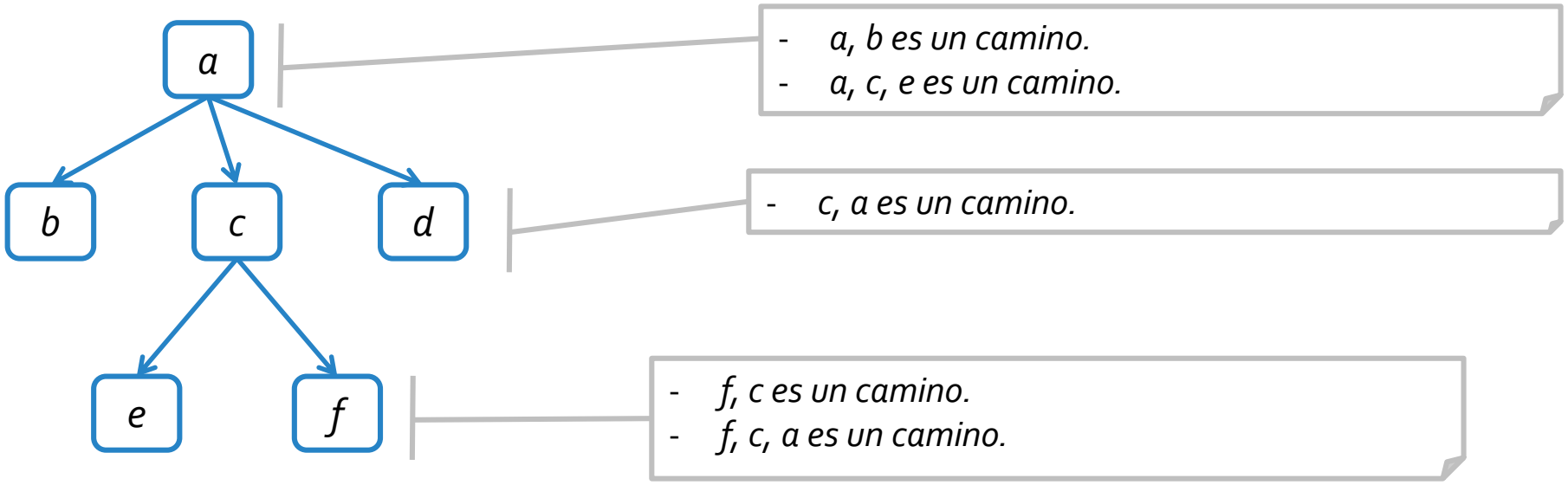
- Nodos **hermanos**: son **nodos** con **igual padre**.
- Nodos **externos** u **hojas**: son **nodos** que **no poseen hijos** en la jerarquía.
- Nodos **internos**: son **nodos** que **poseen al menos un hijo** en la jerarquía.

Introducción: ¿qué es un árbol?



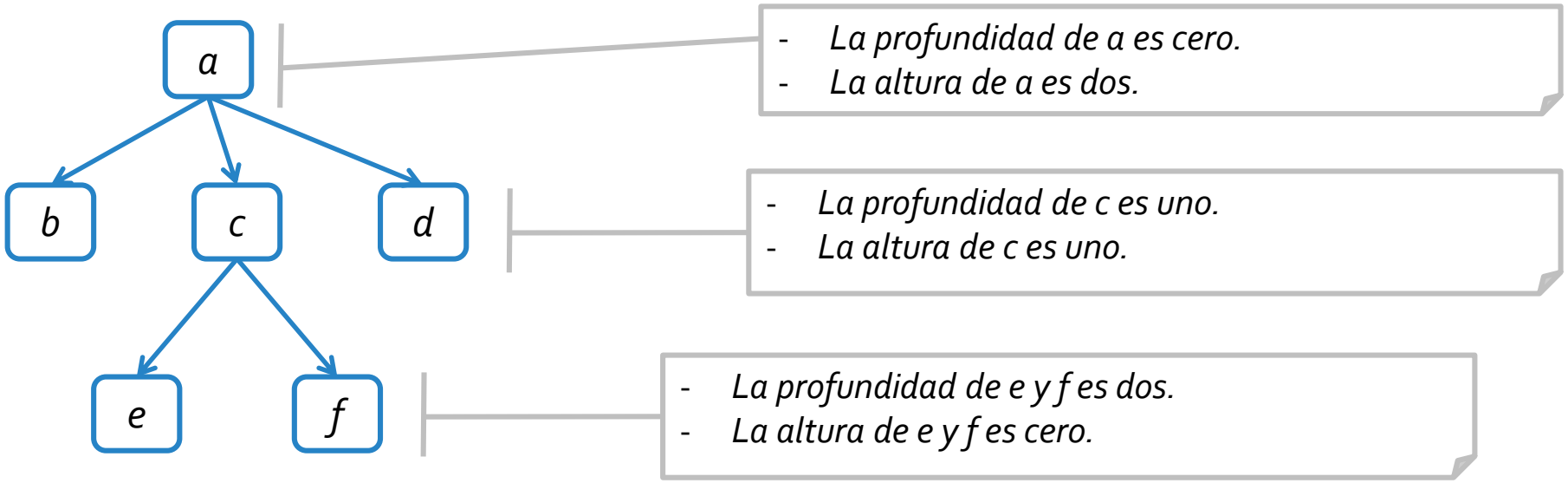
- Nodo **ancestro**: un **nodo n** es **ancestro** de un **nodo m** si **n es m** o **n es ancestro** del **padre de m**.
- Nodo **ancestro propio**: un **nodo n** es **ancestro propio** de un **nodo m** si **n es ancestro de m** y **n es distinto de m**.

Introducción: ¿qué es un árbol?



- **Camino**: un **camino** es una **secuencia** de **nodos** tal que todo par consecutivo de **nodos** está **unido** por un **arco**.

Introducción: ¿qué es un árbol?



- **Profundidad de un nodo**: la **profundidad** de un **nodo n** equivale a la **longitud** del **camino** entre los **nodos raíz** y **n**.
- **Longitud de camino**: equivale a la cantidad de **arcos** del **camino**.
- **Altura de un nodo**: la **altura** de un **nodo n** equivale a la **longitud** del **camino** más largo a una **hoja** del **subárbol** con **raíz n**.

TDA ARBOL

Las representaciones gráficas de los árboles de las siguientes transparencias (parcialmente) son de autoría de la Dra. M. L. Ganuza (mlg@cs.uns.edu.ar).

TDA Arbol

- Se puede definir un **tipo de dato Arbol** que indique qué métodos lo define.
- Al igual que en el **TDA Lista**, se utilizará el concepto de **Position** para referenciar elementos del árbol.

```
public interface Tree<E> extends Iterable<E>{
  //Operaciones de consulta y manipulación.
  public int size();
  public boolean isEmpty();
  public Iterator<E> iterator();
  public Iterable<Position<E>> positions();
  public E replace(Position<E> v, E e) throws InvalidPositionException;
  public Position<E> root() throws EmptyTreeException;
  public Position<E> parent(Position<E> v) throws InvalidPositionException, BoundaryViolationException;
  public boolean isInternal(Position<E> v) throws InvalidPositionException;
  public boolean isExternal(Position<E> v) throws InvalidPositionException;
  public boolean isRoot(Position<E> v) throws InvalidPositionException;
  ...
}
```

TDA Arbol

- Se puede definir un **tipo de dato Arbol** que indique qué métodos lo define.
- Al igual que en el **TDA Lista**, se utilizará el concepto de **Position** para referenciar elementos del árbol.

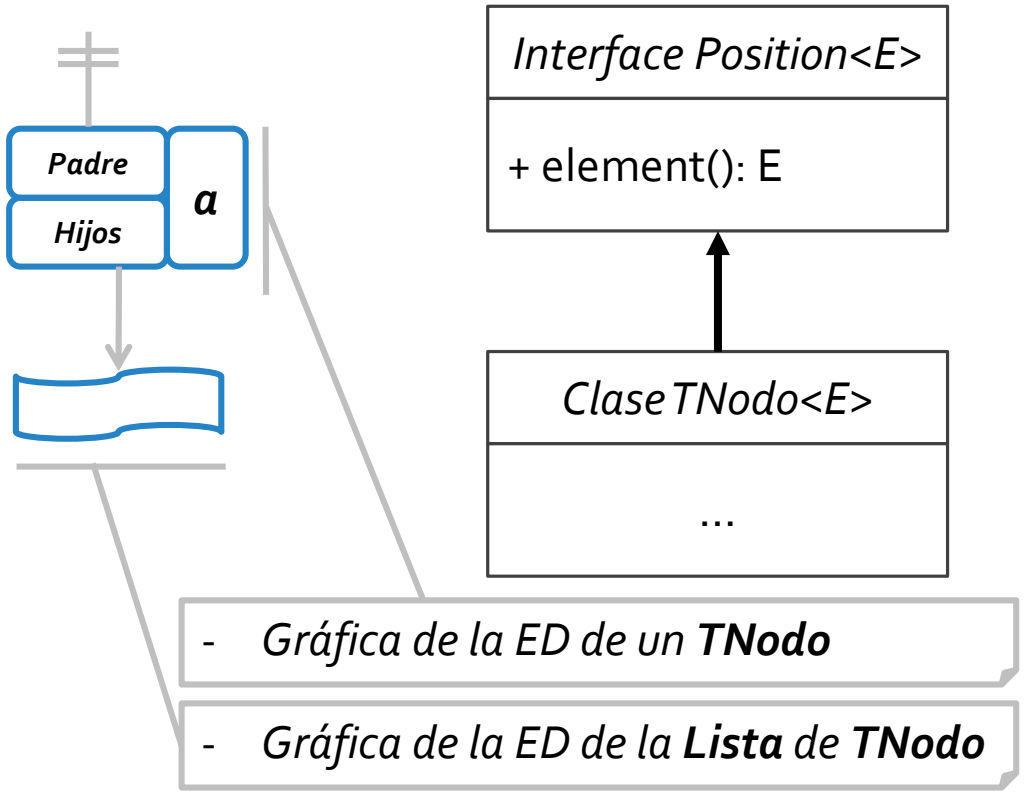
```
public interface Tree<E> extends Iterable<E>{
  //Operaciones para creación y modificación.
  public void createRoot(E e) throws InvalidOperationException;
  public Position<E> addFirstChild(Position<E> p, E e) throwsInvalidPositionException;
  public Position<E> addLastChild(Position<E> p, E e) throws InvalidPositionException;
  public Position<E> addBefore(Position<E> p, Position<E> rb, E e) throws InvalidPositionException;
  public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
  public void removeExternalNode (Position<E> p) throws InvalidPositionException;
  public void removeInternalNode (Position<E> p) throws InvalidPositionException;
  public void removeNode (Position<E> p) throws InvalidPositionException;
}
```

IMPLEMENTACIÓN DEL TDA ARBOL MEDIANTE NODOS CON REF. AL PADRE y LISTA DE HIJOS

Las representaciones gráficas de los árboles de las siguientes transparencias (parcialmente) son de autoría de la Dra. M. L. Ganuza (mlg@cs.uns.edu.ar).

ED TNodo

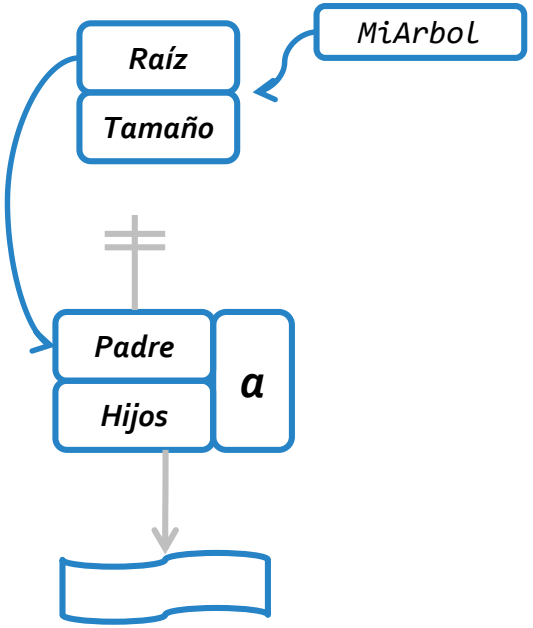
- Bajo esta implementación, se define una ED **TNodo** que mantiene un rótulo, así como una **referencia a un nodo** y una **lista de nodos** que representan los nodos **padre** e **hijos**, respectivamente, del nodo modelado.

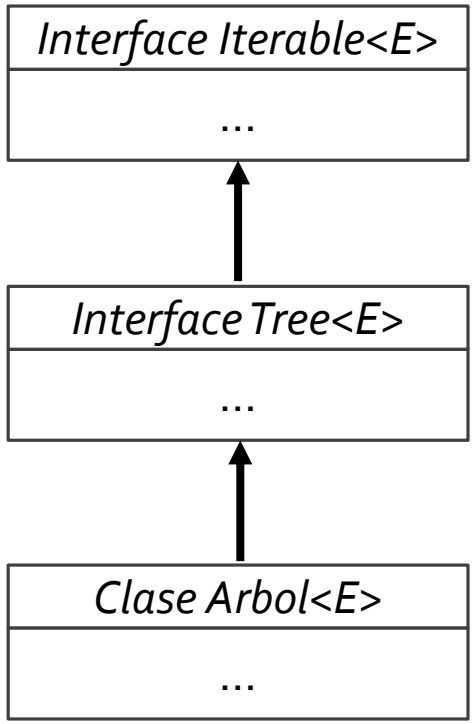



```
public class TNodo<E> implements Position<E> {
  protected E elemento;
  protected TNodo<E> padre;
  protected PositionList<TNodo<E>> hijos;

  public TNodo(E el, TNodo<E> p){
    elemento = el;
    padre = p;
    hijos = new DoubleLinkedList<TNodo<E>>();
  }

  public TNodo<E> getPadre(){ return padre; }
  public PositionList<TNodo<E>> getHijos(){ return hijos; }
  public E element() { return elemento; }
  public void setPadre(TNodo<E> p){ padre = p; }
  public void setElement(E e){ elemento = e; }
}
```

ED Arbol

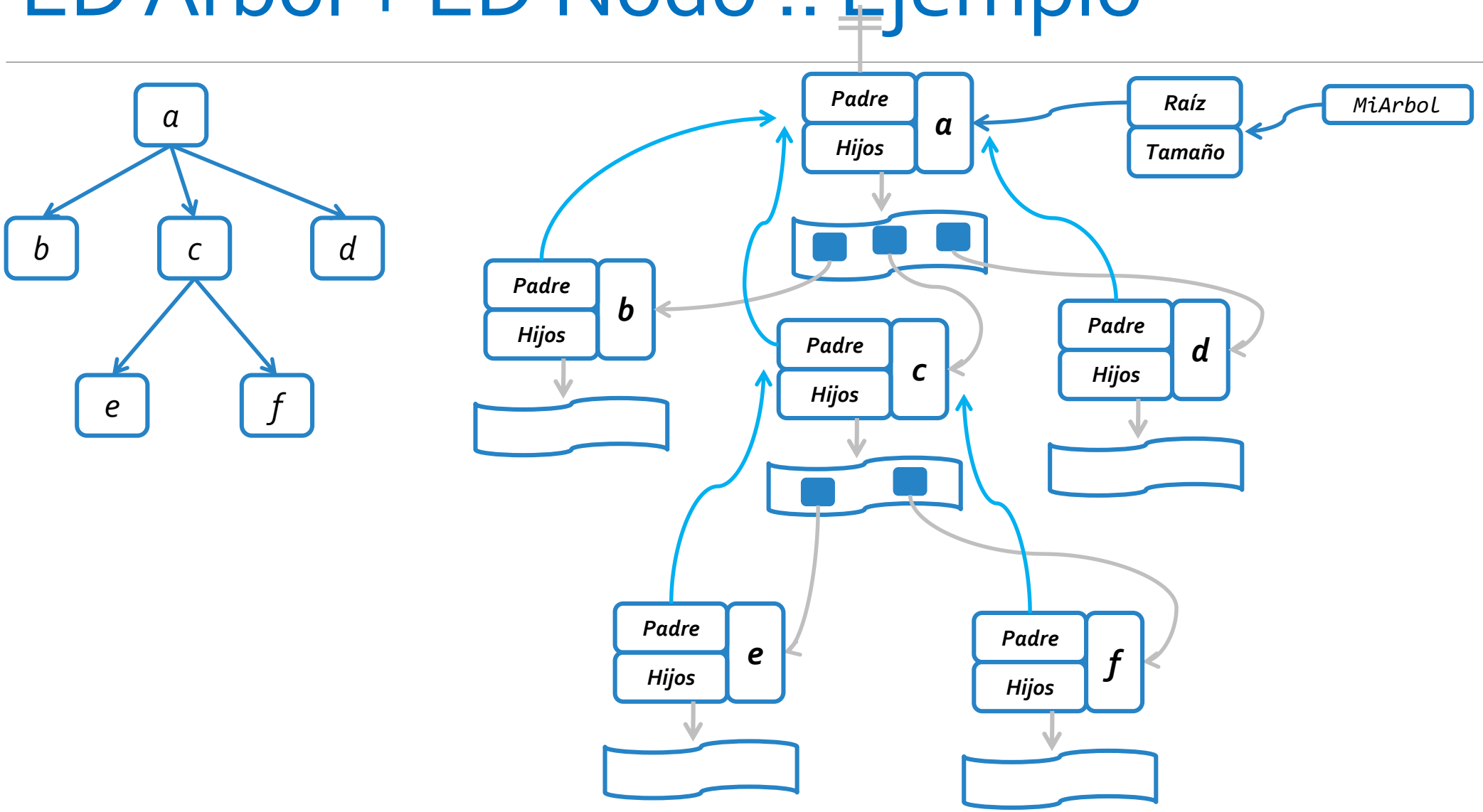
- Bajo esta implementación, un **árbol** se define manteniendo referencia a un **TNodo** que representa la **raíz**. A partir de este, luego se puede acceder a todos los restantes nodos.






```
public class Arbol<E> implements Tree<E> {
  protected TNodo<E> raiz;
  protected int tamaño;

  public Arbol(){
    tamaño = 0;
    raiz = null;
  }

  public Arbol(E rot){
    tamaño = 1;
    raiz = new TNodo<E>(rot, null);
  }
  ...
}
```

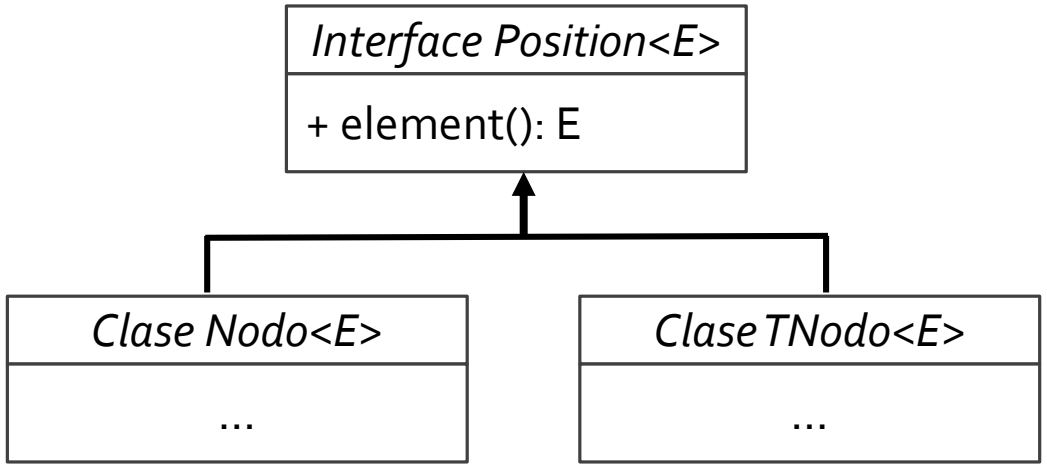
ED Arbol + ED Nodo :: Ejemplo



POSITION de LISTA
vs.
POSITION de ÁRBOL

Diferencia entre Positions de árbol y lista

- Una de los **errores** más **frecuentes** en la materia es confundir las **Positions** de **árbol** y las de **lista**.
- El **error** surge ya que tanto el **árbol** como la **lista**, hacen uso de este TDA, pero se **debe** tener en cuenta que **internamente** son **ED diferentes**.
- Considerando las ED **Nodo** de lista como **TNodo** de árbol, podemos observar que ambas son **Position**.



- **De aquí** la **importancia** de considerar correctamente la jerarquía de herencia.
- Todo **Nodo** **es** una **Position**.
- Todo **TNodo** **es** una **Position**.
- **No es posible** asegurar que toda **Position** es un **Nodo** o un **TNodo**.

Diferencia entre Positions de árbol y lista

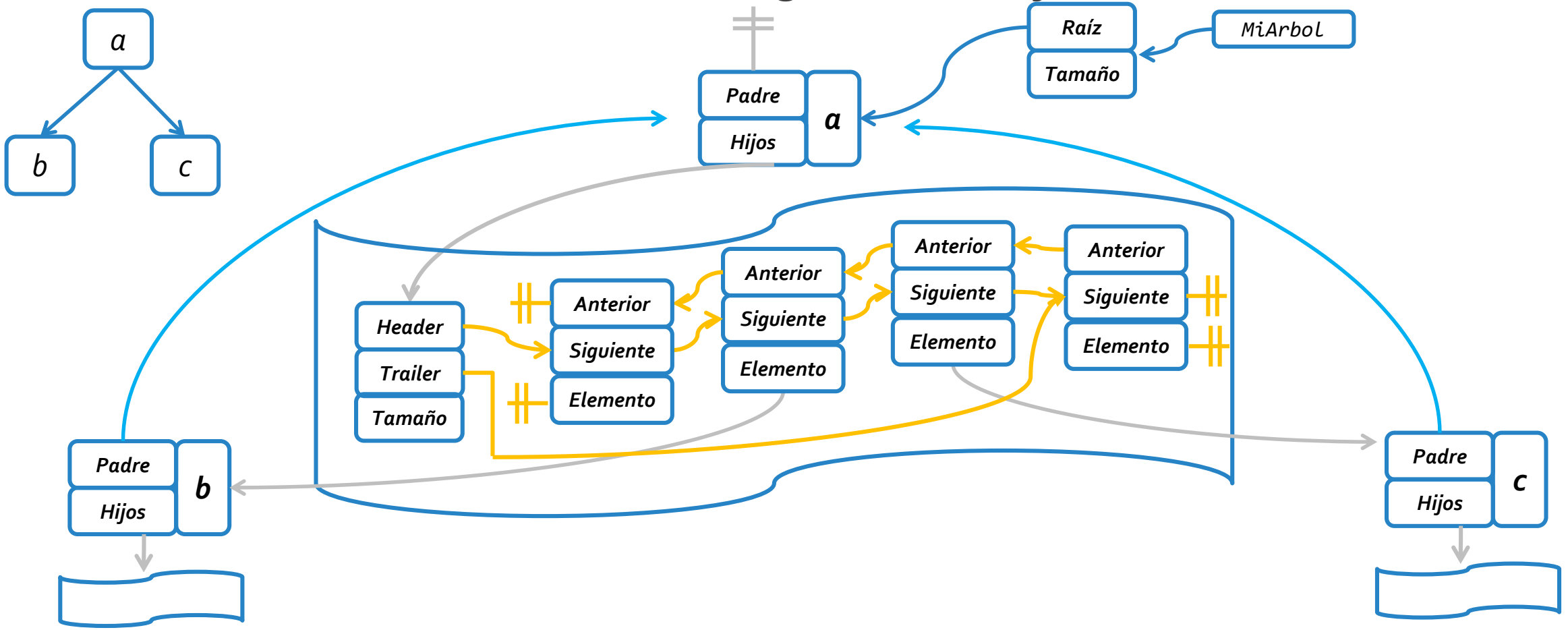
- Considere el siguiente código fuente:

```
public class Tester {
  public static void main(String [] args){
    try{
      PositionList<Integer> lista = new DoubleLinkedList<Integer>();
      lista.addFirst(15);

      Tree<Integer> arbol = new Arbol<Integer>();
      arbol.createRoot(10);

      Position<Integer> pLista = lista.first();
      Position<Integer> pArbol = arbol.root();

      lista.remove(pArbol);
      arbol.addLastChild(pLista, 63);

    }catch(InvalidOperationException e){
    }catch(EmptyListException e1){
    }catch(EmptyTreeException e2){
    }catch(InvalidPositionException e3){ System.out.println("Invalid Position"); }
  }
}
```

- *¿Qué sucede en tiempo de **compilación**?*
- *La compilación es **exitosa**.*
- *¿Qué sucede en tiempo de **ejecución**?*
- *¿Qué harán tanto la implementación de la **lista** como la implementación del **árbol** al recibir las positions?*
- ***Chequearán** que las posiciones sean **válidas**, esto es, que internamente estén instanciadas con una ED **Nodo** y **TNodo** respectivamente.*
- *Luego, en cualquiera de los casos, se lanzará una **InvalidPositionException**.*

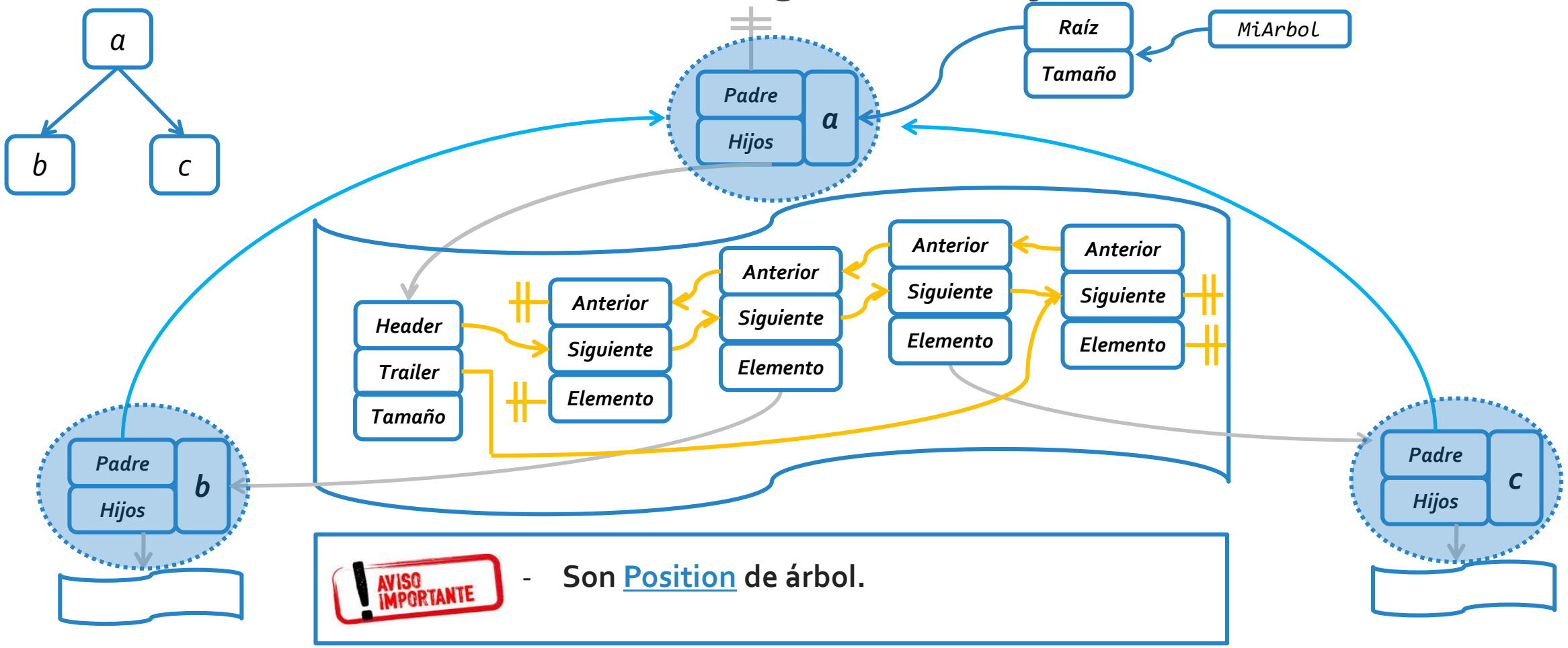
Diferencia entre Positions de árbol y lista

- Analicemos la diferencia en un diagrama de objetos.



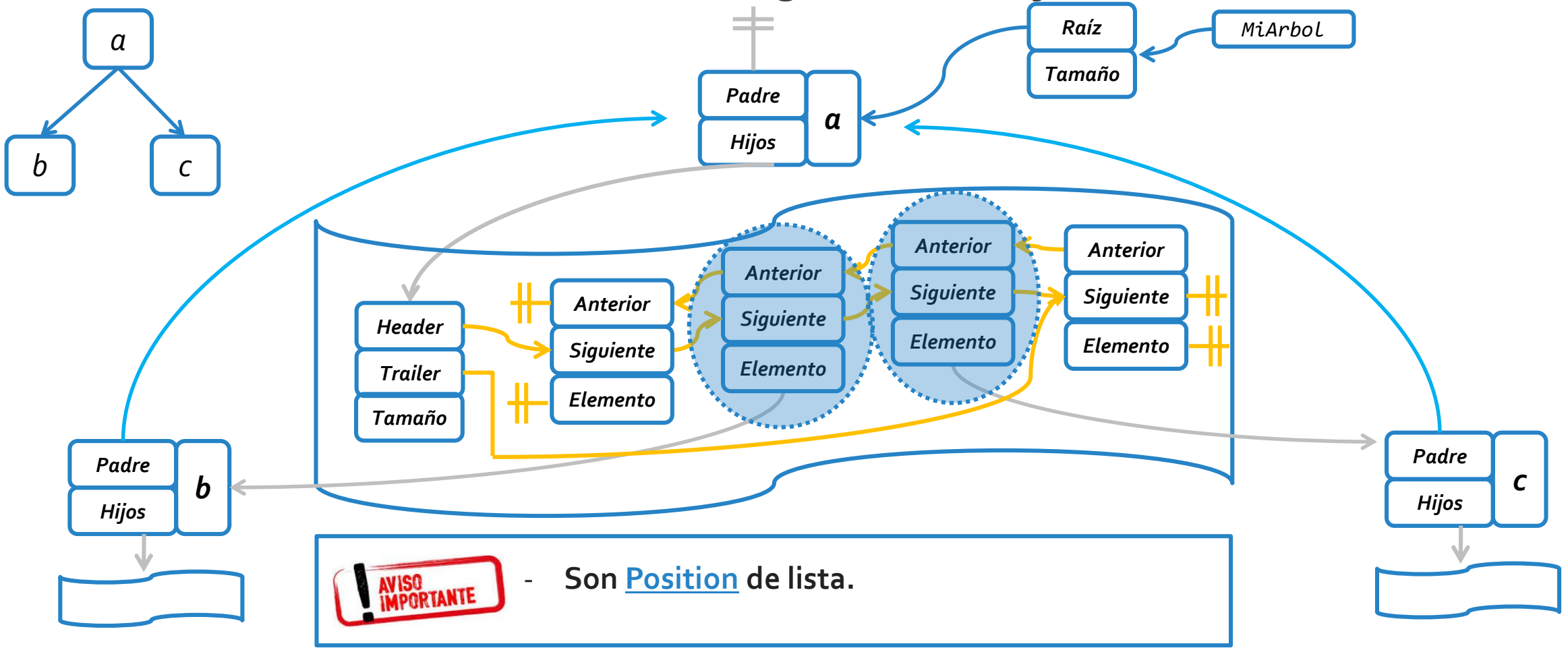
Diferencia entre Positions de árbol y lista

- Analicemos la diferencia en un diagrama de objetos.



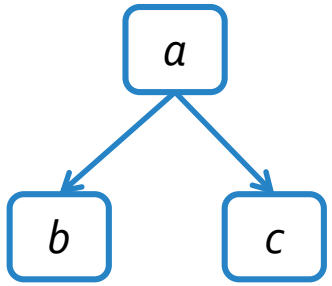
Diferencia entre Positions de árbol y lista

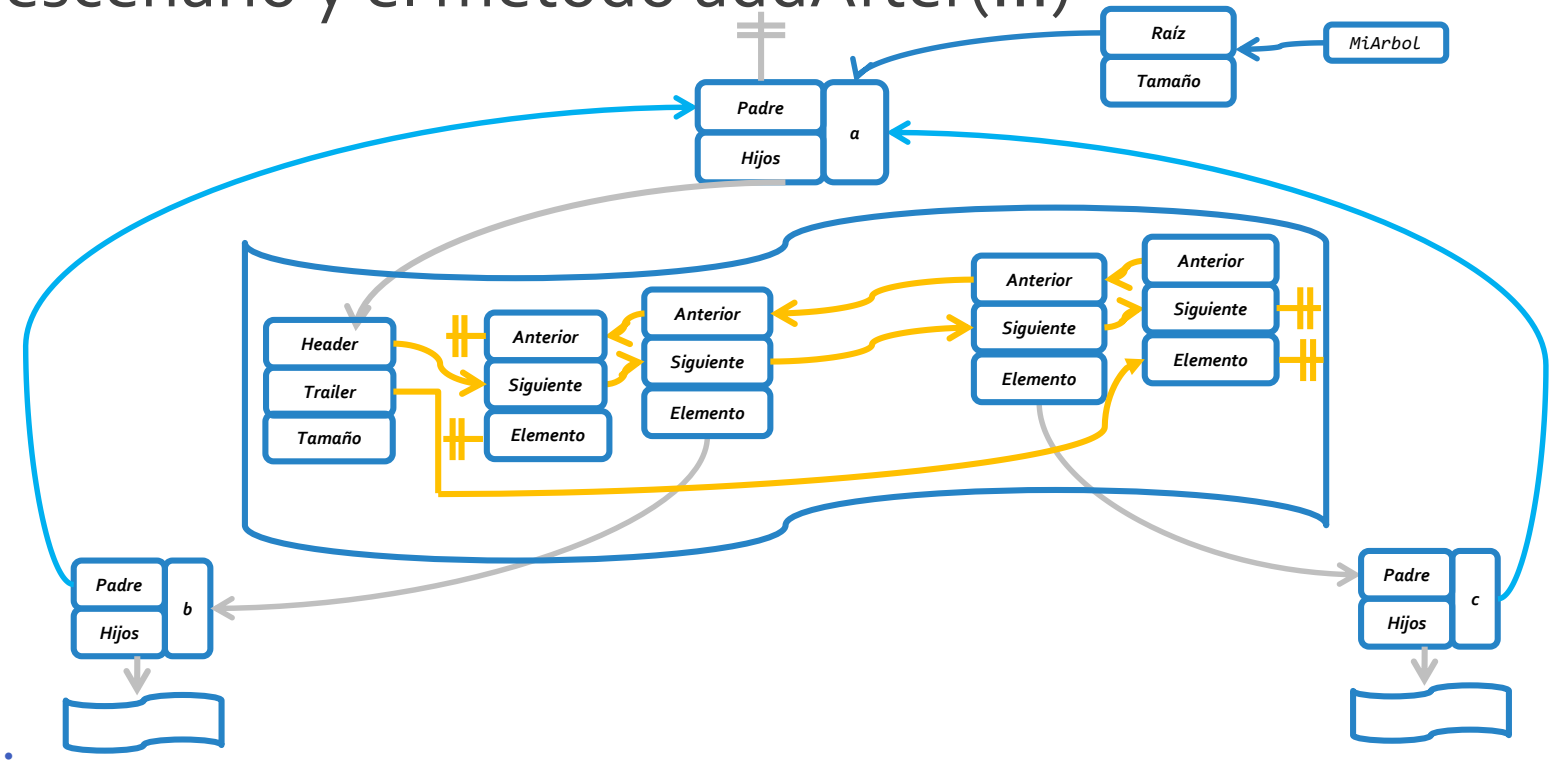
- Analicemos la diferencia en un diagrama de objetos.



Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)

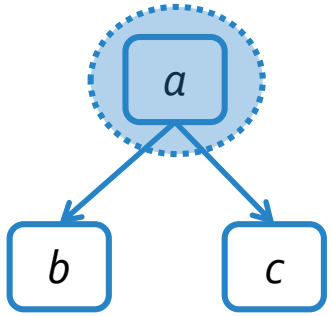


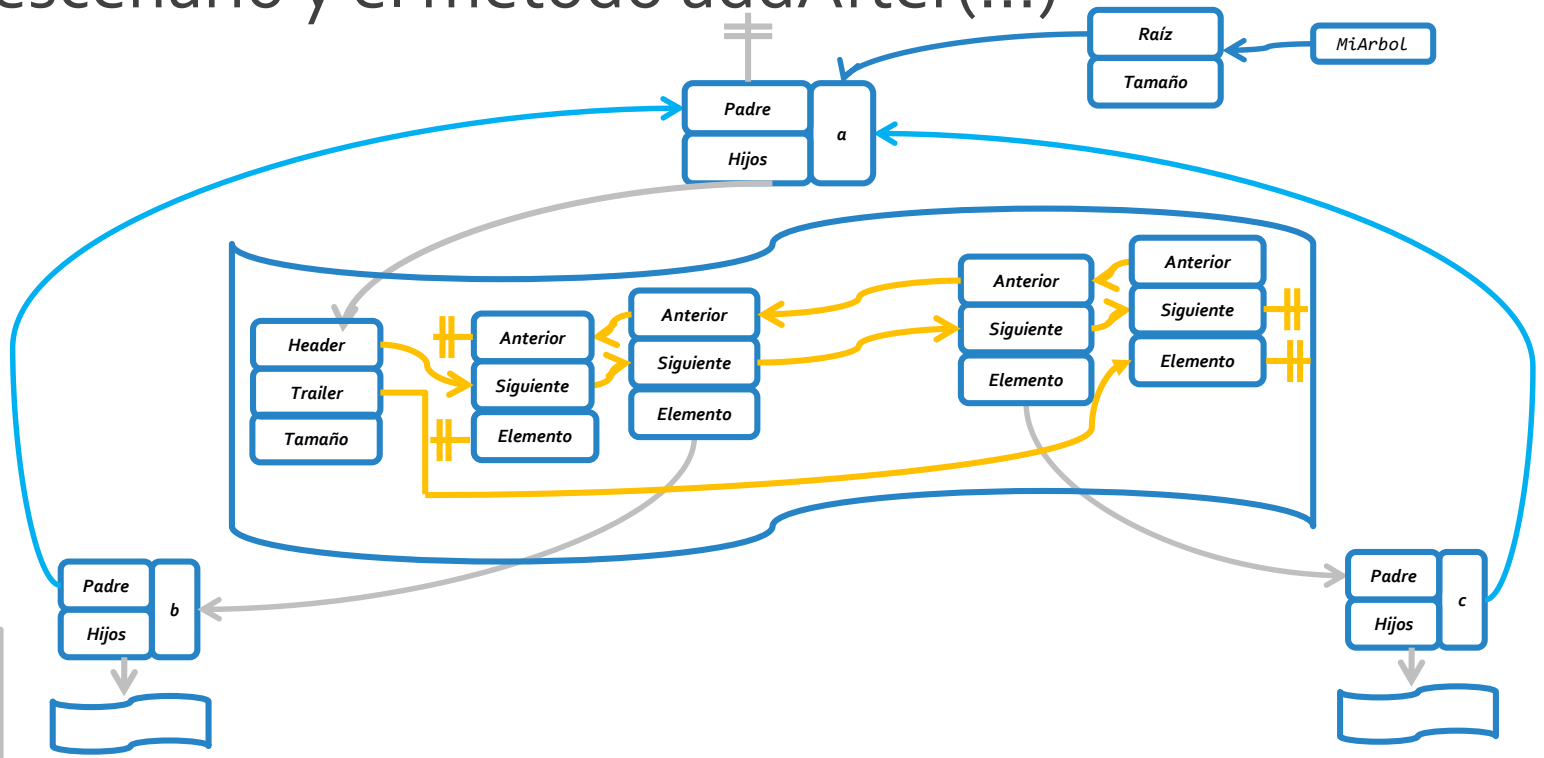



```
/**
 * Agrega un nodo con rótulo e como hijo de
 * un nodo padre dado. El nuevo nodo se
 * agregará a continuación de otro nodo
 * también dado.
 * @param e Rótulo del nuevo nodo.
 * @param p Posición del nodo padre.
 * @param lb Posición del nodo que será el
 * hermano izquierdo del nuevo nodo.
 * @return La posición del nuevo nodo creado.
 * @throws InvalidPositionException si la posición pasada por parámetro es inválida, o el árbol está vacío, o la
 * posición lb no corresponde a un nodo hijo del nodo referenciado por p.
 */
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)





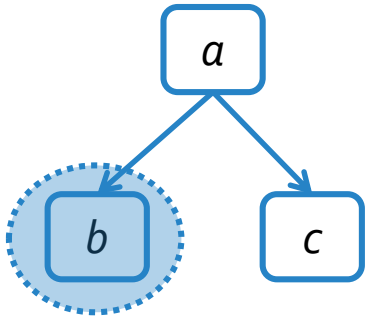
- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *p será el nodo a.*

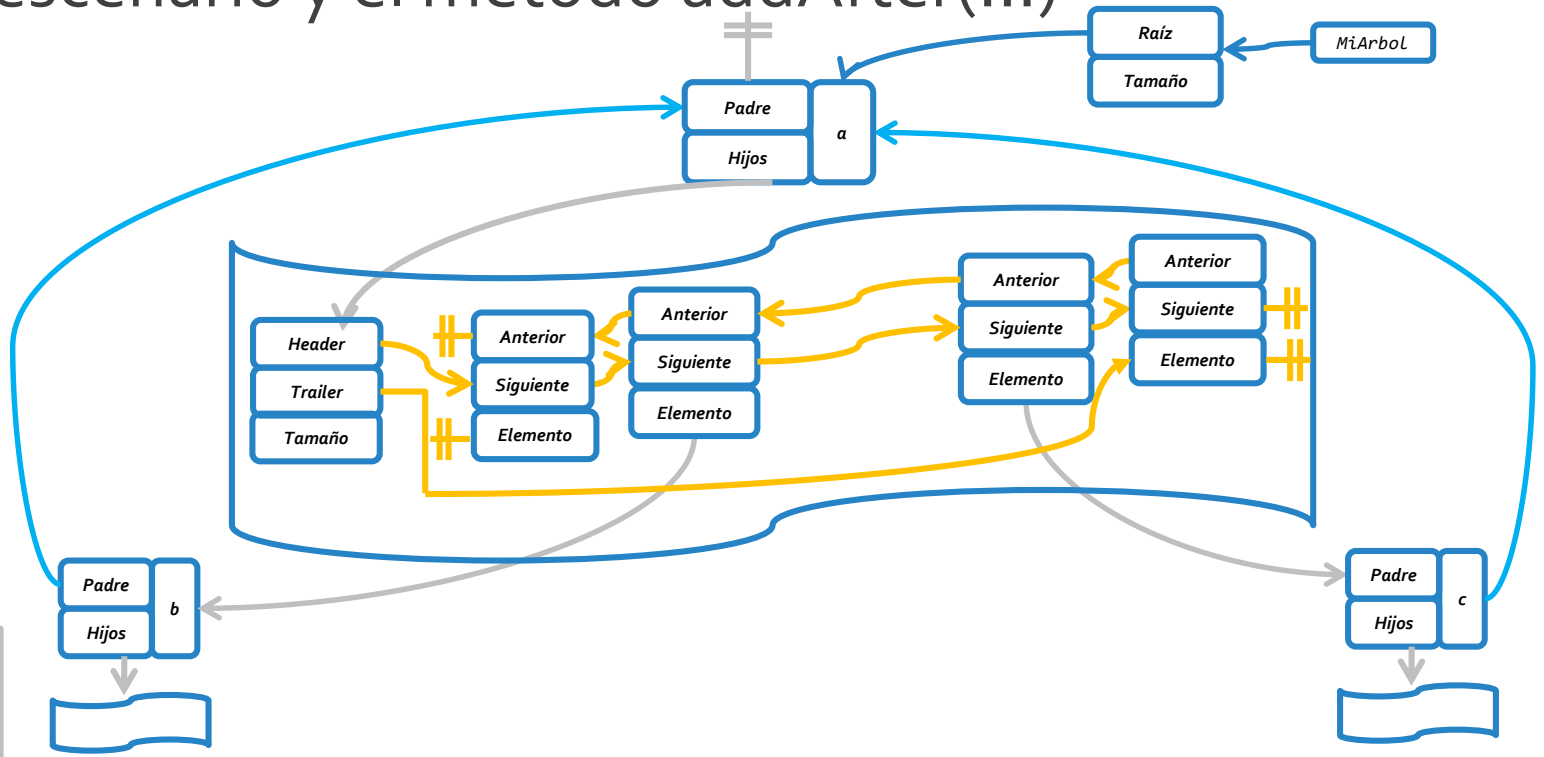
```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)





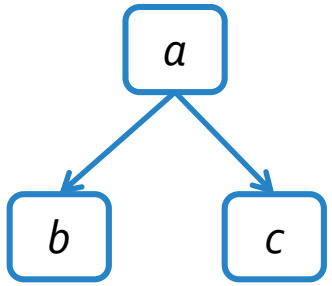
- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *p será el nodo a.*
- *lb será el nodo b.*

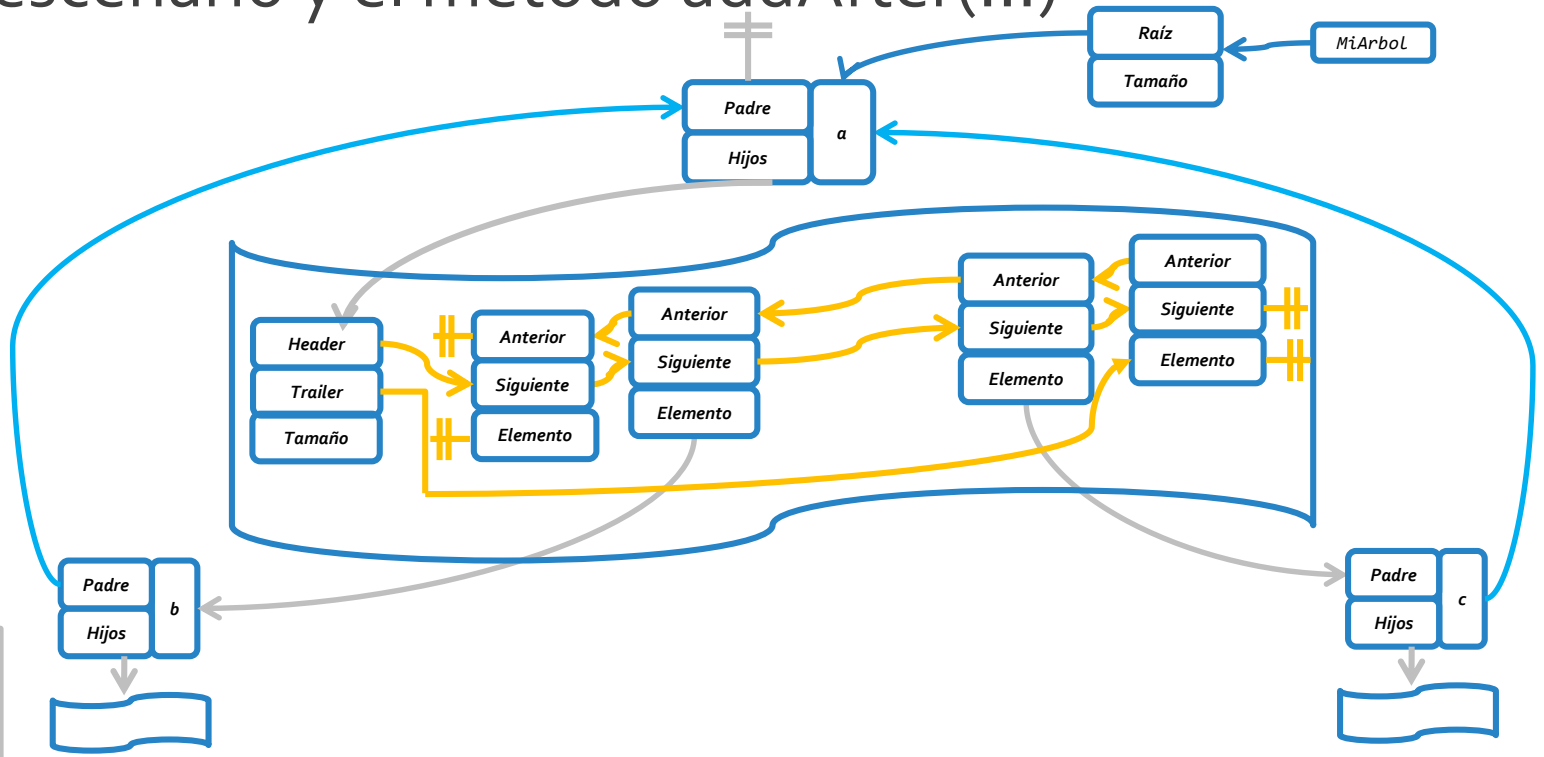
```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)





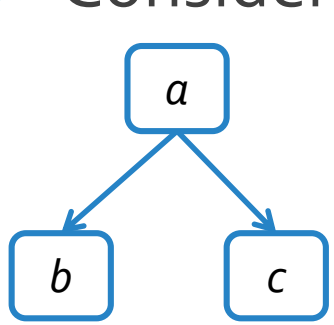
- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *p será el nodo a.*
- *lb será el nodo b.*
- *e será el rótulo d.*

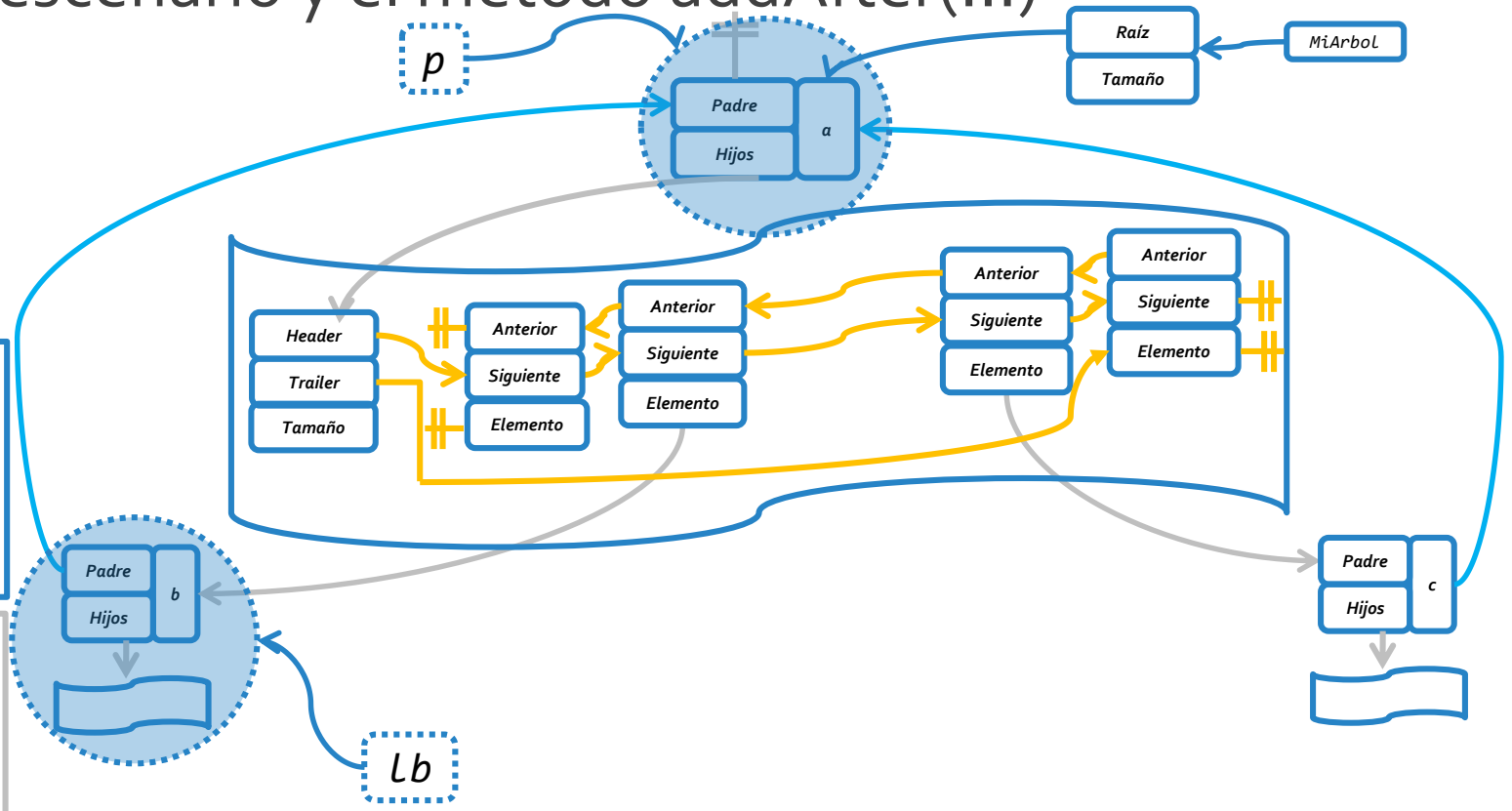
```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)





Asumimos por simplicidad que las posiciones son válidas. En la implementación, esto debe validarse.

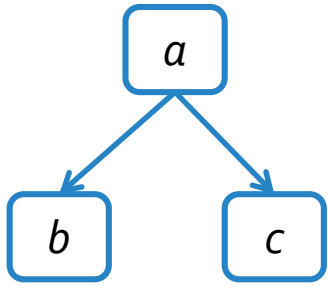
- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *p será el nodo a.*
- *lb será el nodo b.*
- *e será el rótulo d.*

```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

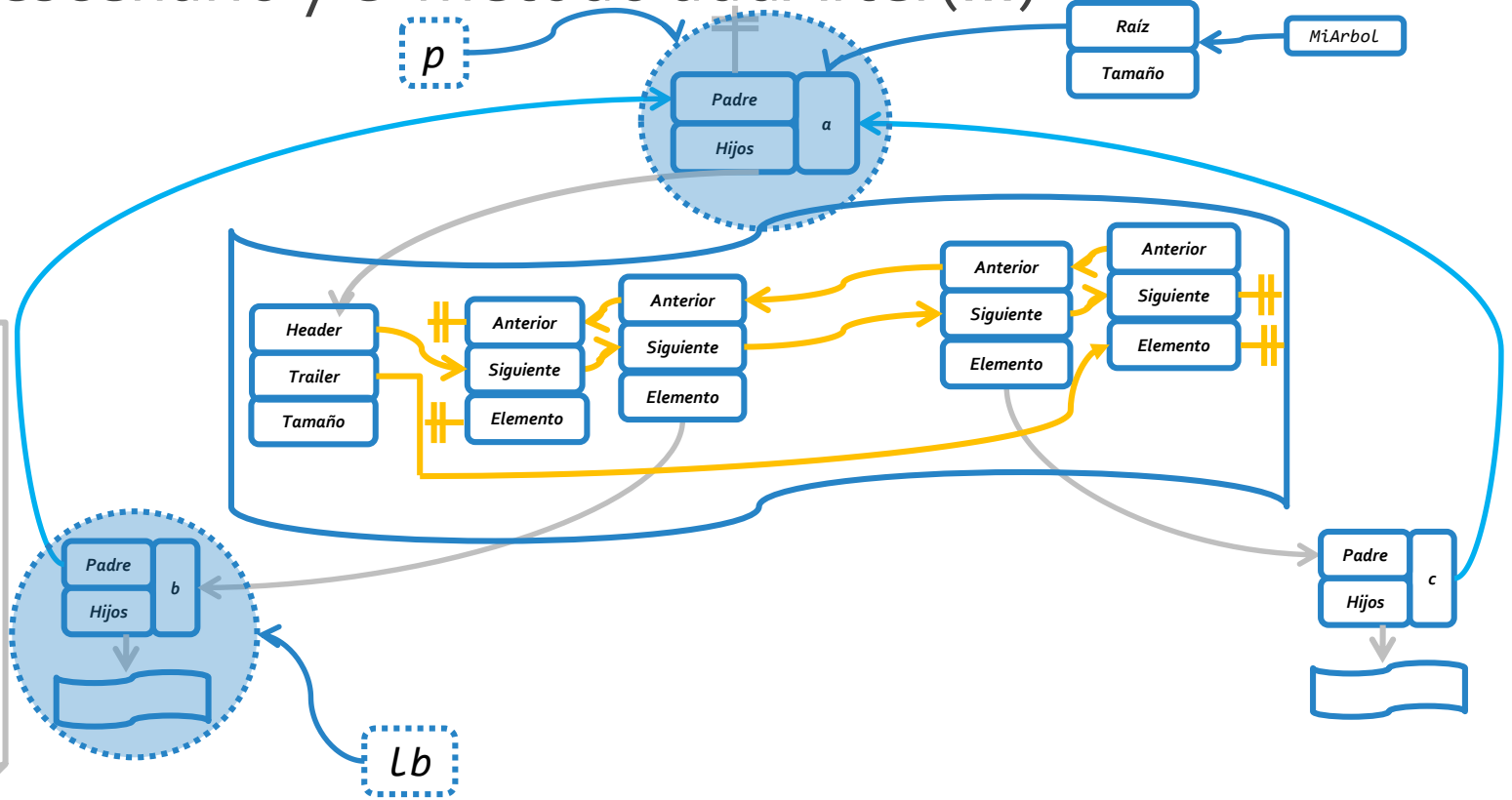
Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)



- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *Como se agregará un nuevo nodo como hijo del **nodo p**, se debe **modificar** su lista de **nodos hijos**.*
- *Se deberá **buscar** la posición de lista (pdl), cuyo elemento sea el nodo de árbol lb.*

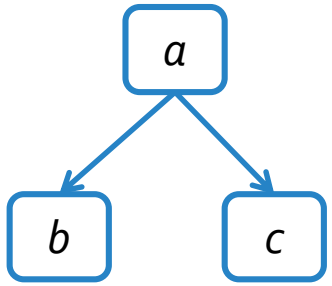



```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

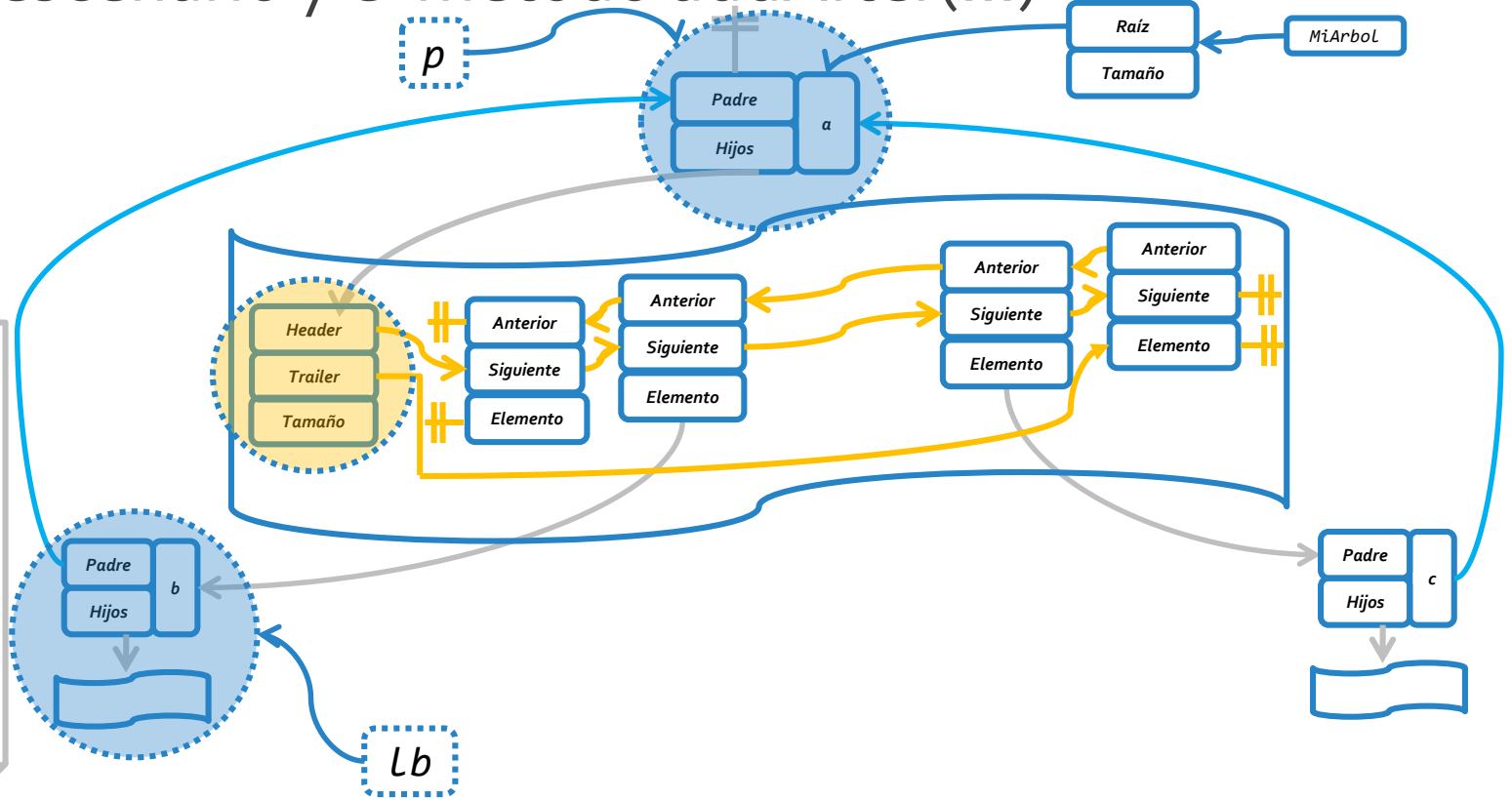
Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)



- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *Como se agregará un nuevo nodo como hijo del **nodo p**, se debe **modificar** su lista de **nodos hijos**.*
- *Se deberá **buscar** la posición de lista (pdl), cuyo elemento sea el nodo de árbol lb.*

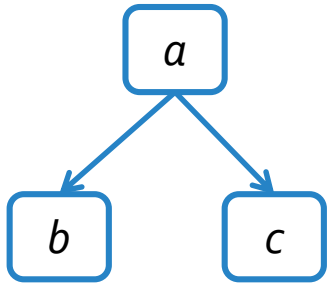



```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

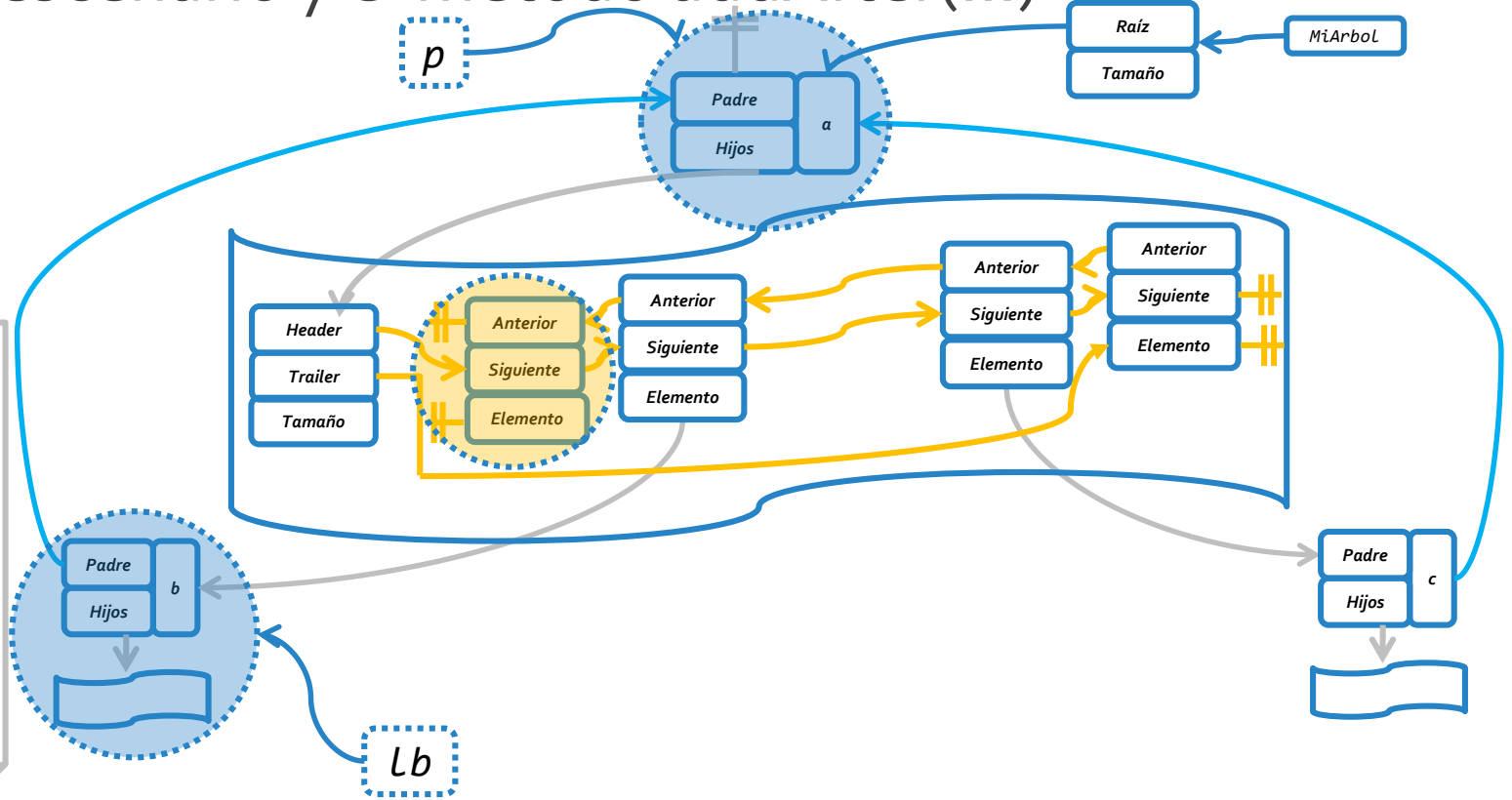
Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)



- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *Como se agregará un nuevo nodo como hijo del **nodo p**, se debe **modificar** su lista de **nodos hijos**.*
- *Se deberá **buscar** la posición de lista (pdl), cuyo elemento sea el nodo de árbol lb.*

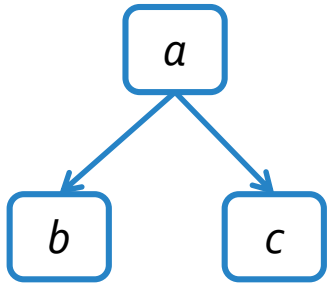



```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

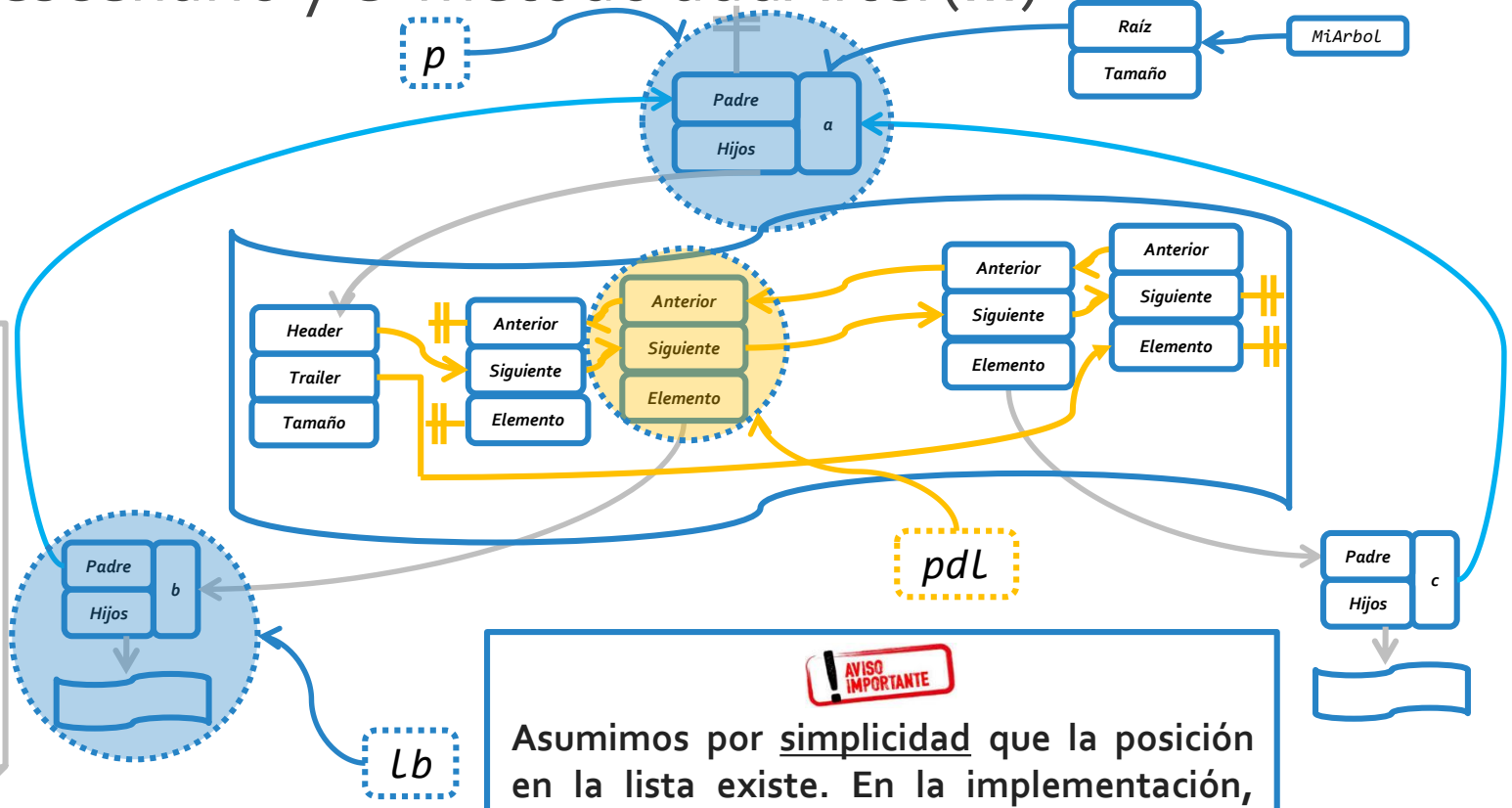
Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)



- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *Como se agregará un nuevo nodo como hijo del **nodo p**, se debe **modificar** su lista de **nodos hijos**.*
- *Se deberá **buscar** la posición de lista (pdl), cuyo elemento sea el nodo de árbol lb.*



AVISO IMPORTANTE

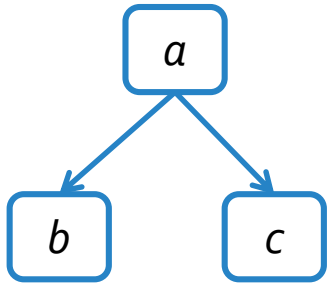
Asumimos por simplicidad que la posición en la lista existe. En la implementación, esto debe validarse.

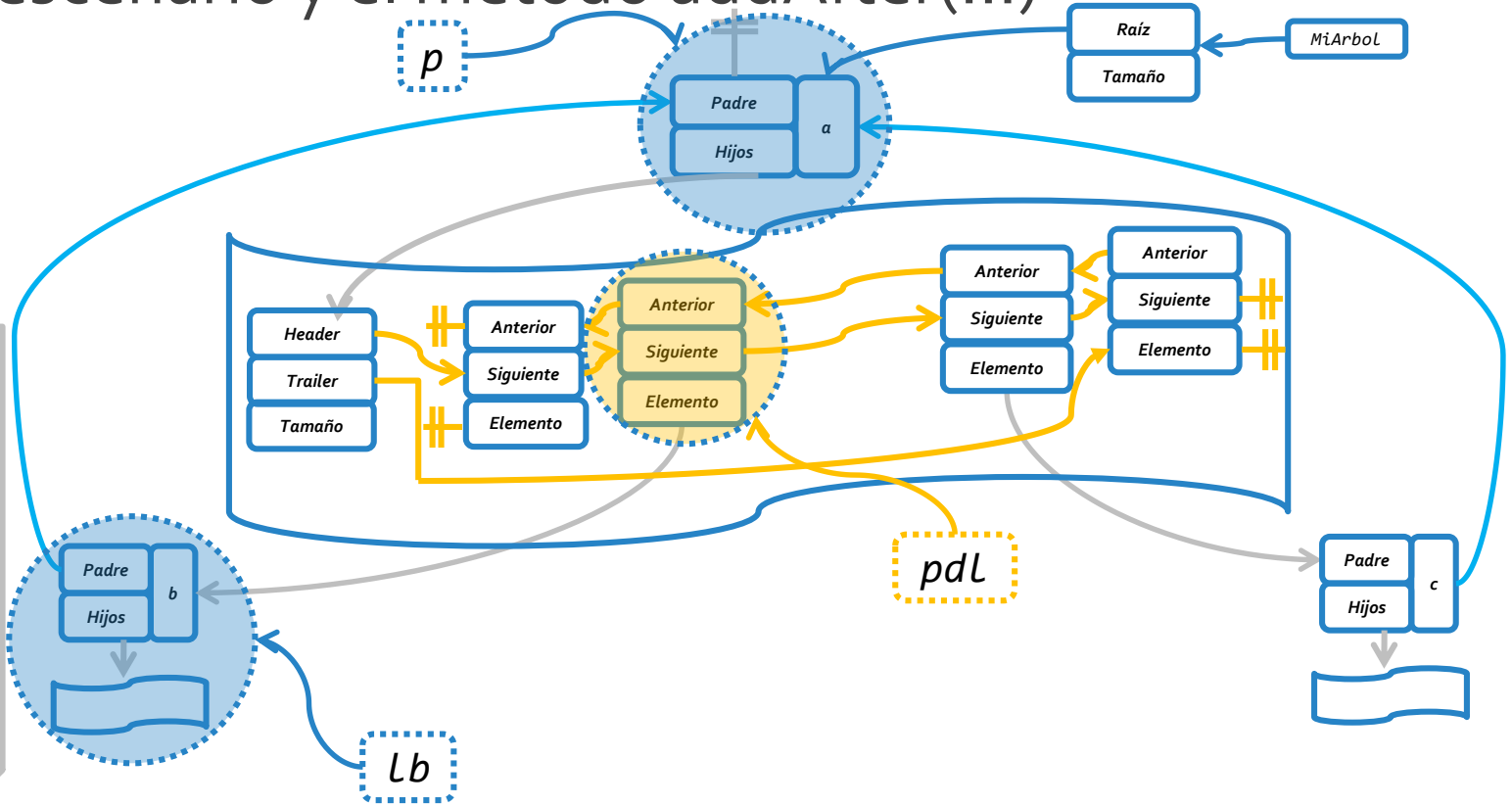
```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)





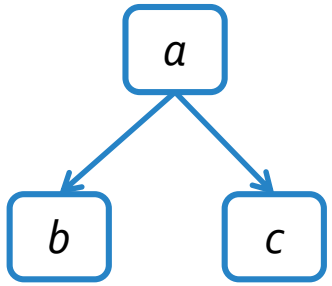
- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *Como se agregará un nuevo nodo como hijo del **nodo p**, se debe **modificar** su lista de **nodos hijos**.*
- *Se deberá **buscar** la posición de lista (pdl), cuyo elemento sea el nodo de árbol lb.*
- *Finalmente, en la **lista** se **agrega** luego de pdl, un nuevo nodo con rótulo d y padre a.*

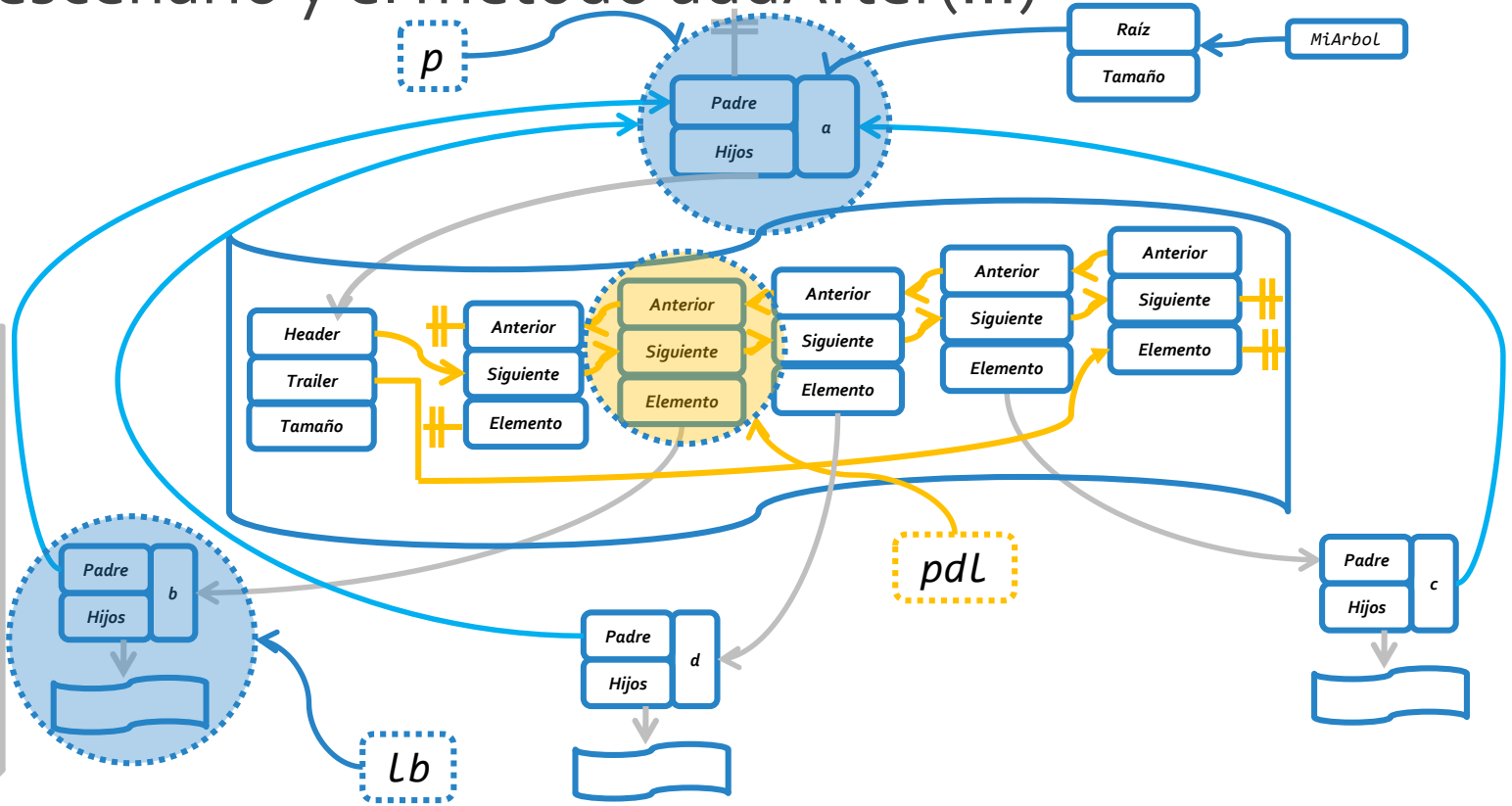
```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)





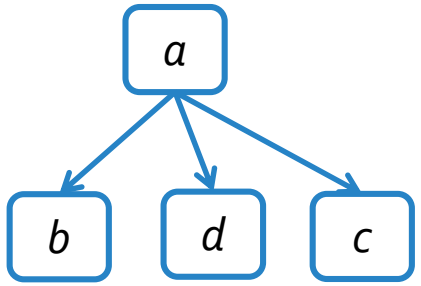
- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *Como se agregará un nuevo nodo como hijo del **nodo p**, se debe **modificar** su lista de **nodos hijos**.*
- *Se deberá **buscar** la posición de lista (pdl), cuyo elemento sea el nodo de árbol lb.*
- *Finalmente, en la **lista** se **agrega** luego de pdl, un nuevo nodo con rótulo d y padre a.*

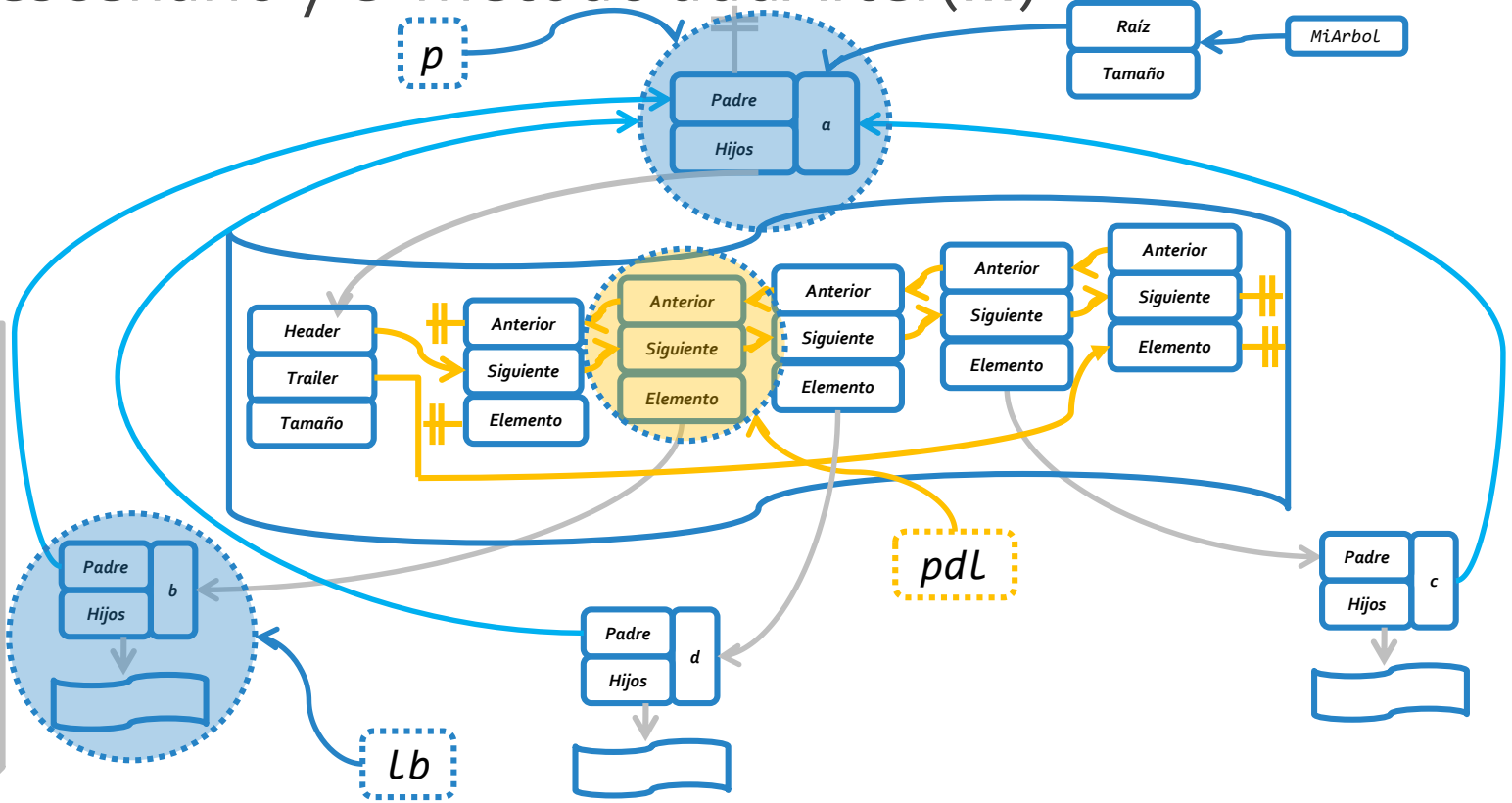
```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

Positions de árbol y lista :: Ejemplo addAfter()

- Consideremos el siguiente escenario y el método addAfter(…)





- *Utilizaremos la operación addAfter(p,lb,e).*
- *Como se agregará un nuevo nodo como hijo del **nodo p**, se debe **modificar** su lista de **nodos hijos**.*
- *Se deberá **buscar** la posición de lista (pdl), cuyo elemento sea el nodo de árbol lb.*
- *Finalmente, en la **lista** se **agrega** luego de pdl, un nuevo nodo con rótulo d y padre a.*

```
public Position<E> addAfter (Position<E> p, Position<E> lb, E e) throws InvalidPositionException;
```

Supongamos que queremos agregar un nodo con rótulo d, como hijo de a, a continuación de b.

IMPLEMENTACIÓN DE REMOVEs

Implementación operaciones remove

- El TDA Árbol considera **tres** operaciones que permiten **eliminar** elementos del árbol.

```
public interface Tree<E> extends Iterable<E>{
  //Operaciones para creación y modificación.
  public void removeExternalNode (Position<E> p) throws InvalidPositionException;
  public void removeInternalNode (Position<E> p) throws InvalidPositionException;
  public void removeNode (Position<E> p) throws InvalidPositionException;
}
```

- En particular, ***removeExternalNode()*** y ***removeInternalNode()*** son casos particulares del caso general de eliminación que define ***removeNode()***.
- Por dicho motivo, es adecuado definir completamente el método ***removeNode()***, y re-utilizar este método cuando se requiera la ejecución de ***removeExternalNode()*** y ***removeInternalNode()***.

Implementación operaciones remove

```
public void removeExternalNode(Position<E> p) throws InvalidPositionException {
  TNodo<E> n = checkPosition(p);
  if(!n.getHijos().isEmpty())
    throw new InvalidPositionException("No es un nodo externo");
  removeNode(n);
}

public void removeInternalNode(Position<E> p) throws InvalidPositionException {
  TNodo<E> n = checkPosition(p);
  if(n.getHijos().isEmpty())
    throw new InvalidPositionException("No es un nodo interno");
  removeNode(n);
}

protected TNodo<E> checkPosition(Position<E> p) throws InvalidPositionException {
  TNodo<E> toReturn = null;
  try{
    toReturn = (TNodo<E>) p;
    if (toReturn == null || toReturn.element() == null)
      throw new InvalidPositionException("");
  }catch(ClassCastException e){ throw new InvalidPositionException(); }
  return toReturn;
}
```

Implementación operaciones remove

```
@Override
public void removeNode(Position<E> p) throws InvalidPositionException {
  TNodo<E> nEliminar = checkPosition(p);
  TNodo<E> padre = nEliminar.getPadre();
  PositionList<TNodo<E>> hijos = nEliminar.getHijos();

  try{
    if (nEliminar == raiz){
      if (hijos.size() == 0){
        raiz = null;
      }else{
        if (hijos.size() == 1){
          TNodo<E> hijo = hijos.remove(hijos.first());
          hijo.setPadre(null);
          raiz = hijo;
        }else
          throw new InvalidPositionException("No se puede eliminar raíz con hijos > 1");
      }
    }else{
      //Sigue en próxima slide.
```

Implementación operaciones remove

```
      //Si no es raíz, nEliminar tiene un padre y por lo tanto una lista de hermanos.
      PositionList<TNodo<E>> hermanos = padre.getHijos();

      //Se debe hallar la posición de lista (en hermanos) que almacene (si existe) nEliminar.
      Position<TNodo<E>> posListaHermanos = hermanos.isEmpty() ? null : hermanos.first();
      while(posListaHermanos != null && posListaHermanos.element() != nEliminar){
        posListaHermanos = (hermanos.last() == posListaHermanos) ? null : hermanos.next(posListaHermanos);
      }

      //Si no existe posición de lista (en hermanos) que almacene a nEliminar, la posición parametrizada p es inválida.
      if (posListaHermanos == null)
        throw new InvalidPositionException("La posición p no se encuentra en la lista del padre");

      //Se agregan en la lista de hermanos de nEliminar, todos los hijos nEliminar (respetando el orden).
      while(!hijos.isEmpty()){
        TNodo<E> hijo = hijos.remove(hijos.first());
        hijo.setPadre(padre);
        hermanos.addBefore(posListaHermanos, hijo);
      }
      hermanos.remove(posListaHermanos);
    }//Else (nEliminar == raíz).

    nEliminar.setPadre(null);
    nEliminar.setElement(null);
    tamaño--;
  }catch(EmptyListException | BoundaryViolationException e){}
}
```

Fin de la presentación.